MAT0334 - ANÁLISE MATEMÁTICA II

IME-USP, PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011
QUINTA LISTA

(1) Considere $D = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2;\ (kx_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ munido da norma de ℓ^2 e defina $T : D \to \ell^2$ por $T((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = ((k+1)x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Mostre que o gráfico T é fechado em $D \times \ell^2$, mas que T não é contínuo.
   (b) Mostre que T é inversível e que sua inversa é contínua.
   (c) Por que este exemplo não viola os teoremas da aplicação aberta e do gráfico fechado?

(2) Seja H um espaço de Hilbert e sejam $A : H \to H$ e $B : H \to H$ funções tais que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ para todos x e y em H. Mostre que A e B são aplicações lineares contínuas. Sugestão: Para a continuidade, use o teorema do gráfico fechado.

(3) Seja H um espaço de Hilbert e sejam $T_n : H \to H$, $n \in \mathbb{N}$, aplicações lineares contínuas tais que, para cada $x \in H$ e para cada $y \in H$, existe o limite $\lim_n \langle x, T_n y\rangle$. Mostre que existe aplicação linear contínua $T : H \to H$ tal que $\lim_n \langle x, T_n y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo x e todo y em H. Sugestão: Use o princípio da limitação uniforme e o Lema de Riesz.

(4) Sejam M e N subespaços fechados do espaço de Banach X tais que $M + N = X$ e $M \cap N = \{0\}$. Considere o produto cartesiano $M \times N$ munido da norma $||(m, n)|| = ||m|| + ||n||$.
   (a) Mostre que a aplicação $M \times N \ni (m, n) \mapsto m+n \in X$ é contínua e tem inversa contínua.
   (b) Mostre que existe aplicação linear contínua $P : X \to M$ satisfazendo $P^2 = P$, com imagem igual a M e núcleo igual a N. Sugestão: Use a igualdade $P(m + n) = m$ para definir uma aplicação linear. Mostre que ela é contínua usando o item (a).