MAT0334 - ANÁLISE MATEMÁTICA II

IME-USP, PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011

TERCEIRA LISTA

(1) Seja M um subespaço do espaço de Hilbert H. Mostre que $(M^{\perp})^{\perp}$ é igual ao fecho de M (lembrando que $S^{\perp}$ denota o conjunto dos elementos de H ortogonais a todos os elementos de $S \subseteq H$).

(2) Seja H um espaço de Hilbert e seja $B : H \times H \to \mathbb{C}$ uma aplicação sesquilinear satisfazendo $|B(x,y)| \leq C||x||\,||y||$ para todo x e todo y em H. Mostre que existe uma única aplicação linear $A : H \to H$ tal que $B(x,y) = (Ax, y)$ para todo x e todo y . Mostre que A satisfaz $||Ax|| \leq C||x||$ para todo x.

(3) Mostre que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Sugestão: Parseval para $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(4) (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$, $x \in [0,1]$. Mostre que $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2([0,1])$

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$g_{nk}(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(n\pi x), & \text{se } x \in [k, k+1] \\ 0, & \text{se } x \notin [k, k+1] \end{cases}.$$

Mostre que $\{g_{nk}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$.