MAT0334 - Análise Matemática II
Segunda Lista de Exercícios

1. Considere $C_c(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ com suporte compacto munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

   Descreva seu completamento.

2. Dizemos que $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ pertence a $C^1([0,1])$ se ela é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e sua derivada f' se estende continuamente a $[0,1]$. Considere $E = \{f \in C^1([0,1]);\ f(0) = 0\}$ munido do produto interno

$$< f, g >= \int_0^1 f^{'}(x)\overline{g'(x)}\, dx \quad \forall f, g \in E.$$

   Mostre que $(E, <, >)$ não é completo. Dica: Integre um certo exemplo da Primeira Lista.

3. Sejam E um espaço de Banach, $D \subseteq E$ um subespaço denso e $T_0 : D \to \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo.

   (a) Mostre que existe $C > 0$ tal que $|T_0(x)| \leq C||x||$ para todo $x \in D$.

   (b) Mostre que existe um único funcional linear contínuo $T : E \to \mathbb{C}$ que estende T_0.

   (c) Descreva todos os funcionais lineares contínuos de um espaço com produto interno arbitrário.

4. Seja H um espaço de Hilbert e seja $P : H \to H$ uma aplicação linear contínua tal que $P = P^2 = P^*$. Mostre que P é a projeção ortogonal sobre algum subespaço fechado de H