MAT 5721 - INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL
2° SEMESTRE DE 2004

SEVERINO TOSCANO MELO

Versão de fevereiro de 2005

A intenção, ou ambição, inicial destas notas era registrar as aulas da disciplina MAT 5721 (oferecida pelo Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP para alunos dos programas de pósgraduação em Matemática e em Matemática Aplicada do Instituto) com alguns poucos acréscimos que não tivessem sido discutidos ou detalhados em sala. Isso só foi feito para as oito primeiras aulas (até 23 de setembro). Das oito aulas seguintes (até 25 de outubro), a presente versão contém apenas as definições e enunciados dos resultados demonstrados. Além de três aulas de revisão e exercícios, houve ainda outras cinco aulas (de 8 a 25 de novembro), das quais constam aqui apenas um título, como registro do assunto abordado, e uma pequena lista de problemas sobre operadores compactos. As três provas aplicadas encontram-se no final.

Sigo aproximadamente os textos [8, 14]. Agradeço a participação dos onze alunos (Alexandre Lymberopoulos, Anderson Adaime de Borba, Débora Cristina Brandt Costa, Ednei Félix Reis, Eliza Ramos de Andrade, Eyder Martinez Montoya, Francisco Martins Moreira, Luís Cláudio Yamaoka, Maria Cristina Del Nery do Amaral, Rogério Augusto dos Santos Fajardo e Sinuê Dayan Barbero Lodovici) e conversas com diversos colegas (Antônio Luiz Pereira, Daniel Tausk, Elói Medina e Oscar Vilcachagua) que tiveram influência, em alguns pontos marcante, na redação destas notas.

1. Espaços com Produto Interno e Normas (23 de agosto)

Nossos espaços vetoriais são sempre reais ou complexos (isto é, os escalares pertencem a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{C}$). Quando não falarmos nada, subentende-se que o espaço é complexo.

Definição 1.1. *Um produto interno em um espaço vetorial complexo V é uma função $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ satisfazendo, para quaisquer x, y e z pertencentes a V e para qualquer α em $\mathbb{C}$:*
(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$,
(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ *se e somente se* $x = 0$,
(iii) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
(iv) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
(v) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
Diz-se que $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ *é um* espaço vetorial com produto interno.

Segue de (iii), (iv) e (v) acima que

(1) $$\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle \quad \text{e} \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

É mais comum entre os matemáticos (especialmente entre os não-analistas) requerer-se que o produto interno satisfaça $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ e $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$. Os físicos costumam seguir a convenção adotada aqui.

`Exemplo` **1.2.** $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n);\ x_i \in \mathbb{C}\}$, munido do *produto interno canônico*

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$$

`Exemplo` **1.3.** O espaço de todas as seqüências complexas $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ com $x_j = 0$ exceto para finitos valores de j, munido de

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j,$$

$\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

`Exemplo` **1.4.** O espaço $C[a, b]$ de todas as funções complexas contínuas definidas no intervalo fechado $[a, b]$, munido de

$$\langle f, g\rangle \ = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Problema **1.** Verifique que os três exemplos precedentes são de fato espaços vetoriais com produto interno.

Problema **2.** Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, e seja $\bar{\Omega}$ seu fecho. Denote por $C^1(\bar{\Omega})$ o espaço das funções de classe C^1 em $\bar{\Omega}$, isto é, f pertence a $C^1(\bar{\Omega})$ se e somente se f é a restrição a $\bar{\Omega}$ de uma função definida e possuindo derivadas de primeira ordem contínuas em um aberto contendo $\bar{\Omega}$. Denote por $C^1_0(\bar{\Omega})$ o espaço das funções $f \in C^1(\bar{\Omega})$ que se anulam na fronteira de Ω. Mostre que, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$, então

$$\langle f, g\rangle^1 \ = \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx + \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx$$

é um produto interno em $C^1(\bar{\Omega})$ e que

$$\langle f, g\rangle_1 \ = \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx$$

é um produto interno em $C^1_0(\bar{\Omega})$, onde ∇ indica gradiente.

`Definição` **1.5.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diremos que dois elementos x e y de V são* ortogonais*, e denotaremos isso por $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$. Um subconjunto $S \subset V$ será* ortonormal *se quaisquer dois elementos distintos de S forem ortogonais e se, além disso, $\langle x, x\rangle = 1$ para todo $x \in S$. Denotaremos por $||\cdot||$ a função*

$$||x|| \ = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ x \in V. \tag{2}$$

A equação (2) deve ser encarada, por enquanto, apenas como notação. Logo definiremos norma e veremos que $||\cdot||$ é, de fato, uma norma.

Teorema 1.6. *Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial com produto interno, seja $||\cdot||$ dada por (2) e seja $S \subset V$ um subconjunto ortonormal finito, $S = \{x_1, \cdots, x_N\}$. Para cada $x \in V$, vale:*

$$||x||^2 = \sum_{j=1}^N |\langle x_j, x\rangle|^2 + ||x - \sum_{j=1}^N \langle x_j, x\rangle x_j||^2 \tag{3}$$

Demonstração: Definindo

$$y_1 = \sum_{j=1}^N \langle x_j, x\rangle x_j \quad \text{e} \quad y_2 = x - y_1$$

temos:

$$\begin{aligned}
\langle y_1, y_2\rangle &= \langle \sum_{j=1}^N \langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^N \langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^N \langle \langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^N \langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^N \overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_j, x\rangle - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^N |\langle x_j, x\rangle|^2 - \sum_{j=1}^N |\langle x_j, x\rangle|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Daí:

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \langle y_1 + y_2, y_1 + y_2\rangle = ||y_1||^2 + ||y_2||^2.$$

A segunda parcela do segundo membro de (3) é, por definição, $||y_2||^2$. Além disso,

$$\begin{aligned}
||y_1||^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \langle x_j, x\rangle x_j, \langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^N |\langle x_j, x\rangle|^2,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

A aplicação $x \mapsto y_1$ definida na demonstração acima é chamada *projeção ortogonal* sobre o espaço gerado por $\{x_1, \cdots, x_N\}$. Boa parte do nosso esforço nas próximas aulas será dirigido a dar um sentido à equação (3) no caso em que o conjunto ortonormal S é infinito e a construir projeções ortogonais sobre certos espaços de dimensão infinita.

O corolário seguinte decorre imediatamente de (3).

Corolário 1.7. (Desigualdade de Bessel) *Sob as hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\sum_{j=1}^N |\langle x_j, x\rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Corolário 1.8. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Para quaisquer elementos x e y de um espaço vetorial com produto interno, temos:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Demonstração: Se $y = 0$, então são nulos ambos os membros da desigualdade que queremos demonstrar. Se $y \neq 0$, aplique o Corolário 1.7 ao conjunto ortonormal unitário $S = \{y/||y||\}$, e use que $|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle|$. □

Só na demonstração do Corolário 1.8, fizemos uso do "somente se" do axioma (ii) da Definição 1.1. A demonstração mais conhecida da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (aquela na qual se discute o polinômio de segundo grau $t \mapsto ||x+ty||^2$) não usa que $\langle x, x\rangle$ só se anula se $x = 0$. Ou seja, o Teorema 1.6 e seus dois corolários valem também para funções $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que satisfaçam apenas os axiomas (i), (iii), (iv) e (v) da Definição 1.1. Esta observação é útil em algumas aplicações, mas não será usada neste curso.

Um produto interno em um espaço vetorial real é, por definição, uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ satisfazendo os mesmos axiomas da Definição 1.1, exceto que se troca $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ e podem-se omitir as barras que indicam o complexo conjugado. É claro, então, que o Teorema 1.6 e seus dois corolários valem também para espaços vetoriais reais, com as mesmas demonstrações.

Embora, por default, nossos espaços sejam complexos, tudo que enunciarmos nestas notas será verdadeiro também para espaços [1] reais. O leitor mais atento deve ter sempre isso em mente, mesmo quando a distinção entre os dois casos não esteja explícita.

Definição 1.9. *Uma norma em um espaço vetorial real ou complexo V é uma função $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos x e y em V e para todo escalar α:*
(i) $||x|| \geq 0$,
(ii) $||x|| = 0$ *se e somente se* $x = 0$,
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(desigualdade triangular),*
(iv) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.
Diz-se que $(V, ||\cdot||)$ *é um* espaço vetorial normado.

Teorema 1.10. *Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. A função definida em* (2) *é uma norma em V.*

Demonstração: As propriedades (i), (ii) e (iv) da Definição 1.9 seguem imediatamente da Definição 1.1. Provemos (iii), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$||x + y||^2 = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re\langle x, y\rangle$$

$$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2|\langle x, y\rangle| \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||)^2,$$

como queríamos. □

Diz-se da norma definida em (2) que é *induzida* pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ou ainda que *provém* de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que um espaço vetorial normado *é* um espaço com produto interno, se sua norma provém de um produto interno.

---

[1] Quando se estuda teoria espectral, entretanto, faz muita diferença o espaço ser real ou complexo. O espectro de um operador limitado em um espaço de Banach complexo é sempre não-vazio, o que não é verdade para espaços de Banach reais.

O espaço das seqüências de quadrado somável.

Denotemos por ℓ^2 o espaço de todas as seqüências $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, tais que $\sum_j |x_j|^2$ é finito. Denotemos a raiz quadrada desta soma por $||\mathbf{x}||$. Nesta sub-seção provamos que ℓ^2 é um espaço vetorial com produto interno e que $||\cdot||$ é a norma induzida por esse produto interno.

Dados $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em ℓ^2, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{4}$$

(esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno do Exemplo 1.2, aplicada aos vetores $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ e $(|y_1|, \cdots, |y_n|)$). O segundo membro de (4) é limitado por por $||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Donde segue que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j \tag{5}$$

é absolutamente convergente.

Temos ainda, também para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2)^{1/2} \le (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} + (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{6}$$

(esta é a propriedade (*iv*) da Definição 1.9 para a norma induzida pelo produto interno do Exemplo 1.2, aplicada aos vetores $(x_1, \cdots, x_n)$ e $(y_1, \cdots, y_n)$). O segundo membro de (4) é limitado por $||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 \le (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2. \tag{7}$$

Segue de (7) que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a ℓ^2, então a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2$$

é finita. Logo ℓ^2 é invariante pela adição de vetores, e portanto é um subespaço do espaço vetorial de todas as seqüências complexas (claro que ℓ^2 é não-vazio e invariante por multiplicação escalar). Dado que a série em (5) converge, é fácil verificar que ela define um produto interno em ℓ^2 e que $||\cdot||$ é a norma induzida por ele. Em particular, vale a desigualdade $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, que também pode ser obtida diretamente de (7).

As normas $||\cdot||_p$, $1 \le p \le \infty$.

Exemplo 1.11. Para cada $p \ge 1$ real, define-se uma norma $||\cdot||_p : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ por

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Define-se ainda $||\cdot||_\infty : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ por

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty \;=\; \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

É fácil provar que $||\cdot||_p$ é uma norma se $p = 1$ ou se $p = \infty$. $||\cdot||_2$ é a norma induzida pelo produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$ (Exemplo 1.2). Para um p qualquer, $1 < p < \infty$, a desigualdade triangular para $||\cdot||_p$ é conhecida como a *Desigualdade de Minkowski* [8, Teorema II.1.3].

Problema **3.** Dado $p \geq 1$, seja ℓ^p os conjunto de todas as seqüências complexas $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_n|^p$$

é finita. Denote por $||\mathbf{x}||_p$ o valor desta soma elevado à potência $1/p$. Usando que $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado, mostre que $(\ell^p, ||\cdot||_p)$ é um espaço vetorial normado.

`Exemplo` **1.12.** Para cada $p \geq 1$,

$$||f||_p \;=\; \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

é uma norma em $C[a,b]$. O caso $p = 1$ é fácil. Para $p = 2$, isso decorre de $||\cdot||_2$ provir de um produto interno (veja o Exemplo 1.4). Para os demais valores de p, de uma versão mais geral da Desigualdade de Minkowski (veja a página 14).

É fácil ver que $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$ também é uma norma em $C[a,b]$.

Paralelogramo e polarização.

Problema **4.** (a) Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial complexo com produto interno, e seja $||\cdot||$ a norma induzida. Demonstre a *identidade de polarização*:

$$\langle x, y\rangle \;=\; \frac{1}{4}\,[\,(||x+y||^2 - ||x-y||^2) - i(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)\,].$$

(b) Demonstre que um espaço vetorial normado é um espaço com produto interno se e somente se a norma satisfaz a *lei do paralelogramo*:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 \;=\; 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

(c) O que muda nos itens (a) e (b) no caso de espaços reais?
(d) Decida se são ou não espaços com produto interno $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$, $p \neq 2$.
Dica: A parte difícil deste problema é o “se” do item (b). Os Problemas 7 e 8 podem ser úteis aí.

2. Continuidade, Completamento (26 de agosto)

`Definição` **2.1.** *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos x, y e z em M:*
(i) $d(x,y) \geq 0$,
(ii) $d(x,y) = 0$ *se e somente se* $x = y$,
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$,
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Diz-se que (M,d) *é um* espaço métrico.

Se $||\cdot||$ é uma norma em V, $d(x,y) = ||x-y||$ é uma métrica, chamada de métrica induzida pela norma. Fica subentendido que todo espaço vetorial normado já vem munido dessa métrica, a menos que se diga o contrário. No caso de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, subentende-se que a norma é o valor absoluto. Assim, a *métrica usual* de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é dada por $d(x,y) = |x-y|$. A *métrica euclideana* em $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ é aquela induzida pela norma $||\cdot||_2$ (veja o Exemplo 1.11).

Definição 2.2. *Uma função $f : M \to N$ entre os espaços métricos M e N é contínua em $a \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \epsilon$$

(denotamos por d ambas as métricas, a de M e a de N). Diz-se que f é contínua se for contínua em todo $a \in M$.

Definição 2.3. *Uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico M converge para $a \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \implies d(x_n, a) < \epsilon.$$

Neste caso, escreve-se $x_n \to a$ ou $\lim x_n = a$, e a é chamado de limite da seqüência. Se $D \subseteq M$ é tal que todo ponto de M é limite de uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n \in D$ para todo n, diz-se então que D é denso *em M. $F \subseteq M$ é* fechado *se contém o limite de toda seqüência de pontos de F que convirja em M. O* fecho *$\bar{A}$ de um subconjunto $A \subseteq M$ é o menor fechado que contém A.*

Observação 2.4. Decorre facilmente das definições que: (i) o limite de uma seqüência é único (isto é, se $x_n \to a$ e $x_n \to b$, então $a = b$); (ii) um subconjunto fechado e denso de um espaço métrico é necessariamente igual ao espaço todo; e (iii) o fecho de um subconjunto A de um espaço métrico M é o conjunto de todos os limites de seqüências em A convergentes em M.

Problema **5.** Seja V um espaço vetorial normado, sejam (x_n) e (y_n) seqüências em V, sejam α e β números complexos.
(a) Mostre que $x_n \to 0$ se e somente se $||x_n|| \to 0$.
(b) Mostre que, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$.

Normalmente é mais fácil trabalhar com seqüências do que com épsilons e deltas. Deixamos como exercício a seguinte descrição de continuidade usando seqüências.

Problema **6.** Mostre que uma função $f : M \to N$ entre os espaços métricos M e N é contínua em $a \in M$ se e somente se

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$$

(isto é, f leva seqüências convergentes a a em seqüências convergentes a $f(a)$).

Problema **7.** Seja V um espaço vetorial normado complexo.
(a) Mostre que $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
(b) Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in V$, mostre que a função

$$V \ni y \longmapsto ||x + \alpha y|| \in \mathbb{R}$$

é contínua.
Sugestões: Prove e use a desigualdade $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x-y||$. Use o Problema 6.

Problema **8.** Seja V um espaço vetorial normado (complexo) e seja $T : V \to V$ uma função contínua tal que, para todos x e y em V, temos

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(ix) = iT(x).$$

Mostre que T é linear.
Sugestões: Use que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Use o Problema 6.

Teorema 2.5. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados. São equivalentes:*
(i) *T é contínua em algum ponto de V.*
(ii) *T é contínua em todos os pontos de V.*
(iii) *Existe $C \geq 0$ tal que $||Tx|| \leq C||x||$ para todo $x \in V$.*

Demonstração: Suponha que T é contínua em a, e seja $b \in V$. Dada seqüência $x_n \to b$, segue do Problema 5-b que $x_n - b + a \to a$. Como T é contínua em a, vem que $T(x_n - b + a) = Tx_n - Tb + Ta \to Ta$. Segue do Problema 5-b, então, que $Tx_n = T(x_n - b + a) + Tb - Ta \to Ta + Tb - Ta = Tb$. Logo, T é contínua em b, pelo Problema 6. Isto prova que (i) implica (ii).

Suponha que vale (iii) e seja (x_n) seqüência em V convergindo a 0. Pelo Problema 5-b, $||x_n|| \to 0$. Como $||Tx_n|| \leq C||x_n||$, vem que $||Tx_n|| \to 0$ e, portanto, $Tx_n \to 0$ (de novo pelo Problema 5-b). Isto prova que T é contínua em 0, logo que (iii) implica (i).

Suponha que não vale (iii). Logo, para todo $C \geq 0$, existe $x \in V$ tal que $||Tx|| > C||x||$. Tomando $C = n \in \mathbb{N}$ na afirmação precedente, obtemos seqüência $x_n \in V$ tal que $||Tx_n|| > n||x_n||$. Em particular, $||Tx_n|| > 0$, logo $Tx_n \neq 0$, logo $x_n \neq 0$. Tome

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{||x_n||}.$$

Então $||y_n|| = 1/\sqrt{n}$ e, portanto, $y_n \to 0$. Todavia,

$$||Ty_n|| = \frac{1}{\sqrt{n}} T(\frac{x_n}{||x_n||}) > \frac{n||x_n||}{\sqrt{n}||x_n||} = \sqrt{n},$$

logo Ty_n não tende a 0. Logo, T não é contínua em 0. Isto prova a contra-positiva de (ii)$\Rightarrow$(iii). $\square$

Definição 2.6. *Uma seqüência x_n em um espaço métrico M é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Problema **9.** Mostre que toda seqüência convergente é de Cauchy. Dê exemplo de um espaço métrico no qual exista uma seqüência de Cauchy que não converge.

Definição 2.7. *Uma* subseqüência *de uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência da forma $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x'_n = x_{\varphi(n)}$ para alguma $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\lim_n \varphi(n) = +\infty$.*

Problema **10.** Mostre que toda seqüência de Cauchy (x_n) em um espaço métrico (M, d) possui uma subseqüência (x'_n) tal que

$$d(x'_n, x'_m) < 1/n, \text{ se } m \geq n.$$

O Problema e a Definição seguintes referem-se ao tema: quando converge uma seqüência de Cauchy?

PROBLEMA **11.** Dada uma seqüência de Cauchy (x_n) em um espaço métrico (M, d), demonstre que:
(a) Se (x'_n) é uma subseqüência de (x_n), então $\lim_n d(x_n, x'_n) = 0$.
(b) Se (x_n) possui uma subseqüência convergente, então ela própria converge.

Definição **2.8.** *Um espaço métrico é completo se, nele, toda seqüência de Cauchy converge.*

Exemplo **2.9.** $\mathbb{R}$ com a métrica usual é o exemplo mais importante de um espaço métrico completo [11, Teorema IV.13].

Definição **2.10.** *Um espaço vetorial normado é completo se, munido da métrica induzida pela norma, ele é um espaço métrico completo. Um espaço vetorial com produto interno é completo se, munido da norma induzida pelo produto interno, ele é um espaço vetorial normado completo. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno completo.*

Exemplo **2.11.** Usando que $\mathbb{R}$ é completo, é fácil provar que $\mathbb{C}^n$ com qualquer uma das normas [2] introduzidas no Exemplo 1.11 é um espaço de Banach.

Exemplo **2.12.** $C[a, b]$ com a norma $||\cdot||_\infty$ do Exemplo 1.12 é um espaço de Banach. Isso vale também se pusermos no lugar de $[a, b]$ qualquer espaço topológico de Hausdorff compacto [3, Proposition 1.2].

Exemplo **2.13.** Para cada $p \geq 1$ real, o espaço ℓ^p introduzido no Exemplo 3 é completo. Veja [8, Exemplo H.6 da Seção I.5] para o caso $p = 2$. O caso p qualquer real é análogo. Essas afirmações podem ser obtidas, também, como casos particulares de [15, Theorem 3.11] (aplicado a $\mathbb{N}$ com a medida da contagem).

É bem mais fácil provar que o espaço ℓ^∞ de todas as seqüências complexas limitadas é um espaço de Banach, se munido da norma $||(c_n)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty = \sup_n |c_n|$.

PROBLEMA **12.** (a) Mostre que $\ell^p \subset \ell^q$ se $1 \leq p < q \leq \infty$.
(b) Mostre que ℓ^p é denso em ℓ^q se $1 \leq p < q < \infty$.
(c) Seja $\mathtt{c}_0$ o espaço de todas as seqüências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \to 0$, seja $\mathtt{c}_c$ o espaço de todas as seqüências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que x_n só é diferente de zero para finitos valores de n. Mostre que $\mathtt{c}_0$ é um subespaço fechado de ℓ^∞ e que $\mathtt{c}_c$ denso em $\mathtt{c}_0$.
(d) Mostre que, se $p < \infty$, o fecho de ℓ^p em ℓ^∞ (com respeito à norma $||\cdot||_\infty$) é igual a $\mathtt{c}_0$.
(e) Conclua que ℓ^p não é denso nem fechado em ℓ^∞ se $p < \infty$.
Dica: O item (a) decorre de [8, Exercício II.1.8-e], mas é mais fácil que ele.

PROBLEMA **13.** Mostre que $(C[a, b], ||\cdot||_p)$ não é completo se $1 \leq p < \infty$ (veja o Exemplo 1.12).

PROBLEMA **14.** Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo, e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua. Mostre que, se existe $C > 0$ tal que $||Tx|| \geq C||x||$ para todo $x \in X$, então a imagem de T é fechada.

Teorema **2.14.** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo Y completo, e seja $D \subseteq X$ um subespaço denso de X. Dada uma transformação linear contínua*

[2] Ou com qualquer outra norma, veja a Proposição 9.3.

$T : D \to Y$ (D visto como um espaço vetorial normado com a norma herdada de X), existe uma única transformação linear contínua $\tilde{T} : X \to Y$ cuja restrição a D é igual a T. Além disso, se $C \geq 0$ é tal que $||Tx|| \leq C||x||$ para todo $x \in D$, então $||\tilde{T}x|| \leq C||x||$ para todo $x \in X$.

Demonstração: Como T é contínua em D, segue do Teorema 2.5 que existe $C \geq 0$ tal que

$$||Tx|| \leq C||x|| \tag{8}$$

para todo $x \in D$. Dado $a \in X$, seja (x_n) uma seqüência em D convergindo para a. Segue de (8) que

$$||T(x_n) - T(x_m)|| = ||T(x_n - x_m)|| \leq C||x_n - x_m||.$$

Usando que (x_n) é de Cauchy (pois converge), decorre então que (Tx_n) também é de Cauchy. Como Y é completo, (Tx_n) é convergente, $Tx_n \to b$.

Seja (y_n) uma outra seqüência em D convergindo para a, e chamemos de $\hat{b}$ o limite de Ty_n (que existe, como acabamos de provar). Como a norma é contínua,

$$||b - \hat{b}|| = \lim_n ||Tx_n - Ty_n|| \leq C \lim_n ||x_n - y_n|| = C||a - a|| = 0.$$

Isto mostra que b não depende da seqüência escolhida. Obtemos assim aplicação $\tilde{T} : X \to Y$, $\tilde{T}a = b$.

Dados x e y em X e α em $\mathbb{C}$, sejam (x_n) e (y_n) seqüências em D convergindo a x e y, respectivamente. Segue do Problema 5 que $x_n + \alpha y_n \to x + \alpha y$. Segue da definição de $\tilde{T}$ e, de novo, do Problema 5 que

$$\tilde{T}(x + \alpha y) = \lim_n T(x_n + \alpha y_n) = \lim_n (Tx_n + \alpha T y_n) = \tilde{T}x + \alpha \tilde{T}y,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é linear. Além disso, segue de (8) que

$$||\tilde{T}x|| = \lim_n ||Tx_n|| \leq C||x_n|| = C||x||,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é contínua e que toda C que faz o serviço em (8) para T serve também para $\tilde{T}$.

A unicidade é conseqüência imediata da densidade de D em X □

O teorema seguinte define precisamente o significado de "completamentos" de espaços vetoriais normados ou com produto interno.

`Teorema` **2.15.** *Dado um espaço vetorial normado $(V, ||\cdot||)$, existe um espaço vetorial normado completo $(\tilde{V}, ||\cdot||^{\tilde{}})$ e uma aplicação linear injetora $\tilde{\imath} : V \to \tilde{V}$ tal que*

(i) *$\tilde{\imath}$ preserva a norma, isto é, $||\tilde{\imath}(x)||^{\tilde{}} = ||x||$ para todo $x \in V$; e*

(ii) *a imagem de $\tilde{\imath}$ é densa em $\tilde{V}$.*

Se, ademais, a norma de V provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então a norma de $\tilde{V}$ provém de um produto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle^{\tilde{}} : \tilde{V} \times \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que $\langle \tilde{\imath}(x), \tilde{\imath}(y) \rangle^{\tilde{}} = \langle x, y \rangle$, para todos x e y em V.

Esta construção é única, no seguinte sentido. Se $(\tilde{\tilde{V}}, ||\cdot||^{\tilde{\tilde{}}})$ é um espaço vetorial normado e $\tilde{\tilde{\imath}} : V \to \tilde{\tilde{V}}$ é uma aplicação linear satisfazendo (i) *e* (ii)*, então existe uma aplicação linear bijetora $\imath : \tilde{V} \to \tilde{\tilde{V}}$ tal que $\tilde{\tilde{\imath}} = \imath \circ \tilde{\imath}$ e $||\imath(x)||^{\tilde{\tilde{}}} = ||x||^{\tilde{}}$ para todo $x \in \tilde{V}$.*

Antes da prova, um comentário. Geralmente identificaremos V com sua imagem por $\tilde{\imath}$ e olharemos para V como se fosse de fato um subespaço denso de $\tilde{V}$. É assim que faz sentido dizer que todo espaço vetorial normado é um subespaço denso de um único espaço de Banach (seu *completamento*), e que todo espaço vetorial com produto interno pode ser *completado* a um único espaço de Hilbert. Para darmos exemplos de espaços de Banach ou de espaços de Hilbert, portanto, basta darmos exemplos de espaços vetoriais normados ou espaços vetoriais com produto interno.

Nestes termos, decorre dos Teoremas 2.14 e 2.15 que toda aplicação linear contínua entre espaços vetoriais normados pode ser estendida de maneira única a seus completamentos. Este é o Teorema I.7 de [14].

Demonstração do Teorema 2.15: Dadas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, duas seqüências de Cauchy em V, definamos

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_n (x_n - y_n) = 0.$$

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Como conjunto, o espaço que vamos construir será a coleção de todas as classes desta relação de equivalência, o que denotamos por:

$$\tilde{V} = \{[(x_n)],\ (x_n) \text{ seqüência de Cauchy em } V\}.$$

Segue de $||x_n+y_n|| \leq ||x_n||+||y_n||$ e de $||\alpha x_n-\alpha y_n|| = |\alpha|\cdot||x_n-y_n||$ que, se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy e se $\alpha \in \mathbb{C}$, então $(x_n + y_n)$ e (αx_n) também são seqüências de Cauchy. Segue de $||(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)|| \leq ||x_n - x'_n|| + ||y_n - y'_n||$ e de $||\alpha(x_n - x'_n)|| = |\alpha| \cdot ||x_n - x'_n||$ que, se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ e $(\alpha x_n) \sim (\alpha x'_n)$. Logo

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)] \quad \text{e} \quad \alpha \cdot [(x_n)] = [(\alpha \cdot x_n)]$$

são operações bem definidas,

$$+ : \tilde{V} \times \tilde{V} \to \tilde{V} \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{C} \times \tilde{V} \to \tilde{V}.$$

Munido delas, $\tilde{V}$ torna-se um espaço vetorial. Isto decorre imediatamente de V ser um espaço vetorial. O zero de $\tilde{V}$ é a classe da seqüência constante igual ao zero de V, $0 = [(0)_{n\in N}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ se $\lim_n x_n = 0$.

Segue de $|\,||x_n|| - ||x_m||\,| \leq ||x_n - x_m||$ que, se (x_n) é de Cauchy em V, então $(||x_n||)$ é de Cauchy em $[0, \infty)$, logo convergente em $[0, \infty)$, pois $[0, \infty)$ é completo. Segue de $|\,||x_n||-||y_n||\,| \leq ||x_n-y_n||$ que, se $(x_n) \sim (y_n)$, então $\lim ||x_n|| = \lim ||y_n||$. Isto é

$$||\,[(x_n)]\,||\tilde{} \;=\; \lim_n ||x_n||$$

é uma aplicação bem definida, de $\tilde{V}$ em $[0, \infty)$. Segue facilmente de $||\cdot||$ ser uma norma em V e da definição de $\sim$ que $||\cdot||\tilde{}$ é uma norma em $\tilde{V}$. Se chamarmos de $\tilde{\imath}(x)$ a classe da seqüência constante igual a x,

$$\tilde{\imath}(x) \;=\; [(x)_{n\in\mathbb{N}}],$$

é óbvio que $||\tilde{\imath}(x)||\tilde{} = ||x||$ para todo $x \in V$ e que $\tilde{\imath}$ é linear e injetora.

Dado $\tilde{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{V}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\tilde{x}_k$ a classe da seqüência constante igual a x_k,

$$\tilde{x}_k \;=\; [(x_k)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, k \geq N \implies ||x_n - x_k|| < \epsilon.$$

Se $k \geq N$, então, temos:

$$||\tilde{x} - \tilde{x}_k|| = \lim_n ||x_n - x_k|| \leq \epsilon.$$

Logo $\tilde{x}_k \to \tilde{x}$, o que prova que $\tilde{i}(V)$ é denso em $\tilde{V}$.

3. Completamentos (30 de agosto)

Conclusão da demonstração do Teorema 2.15: Dada uma seqüência de Cauchy $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\tilde{V}$, queremos provar que ela converge. Pelo Problema 11-b, basta provar que uma subseqüência de $(\tilde{x}_k)$ converge. Usando o Problema 10, extraia de $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência $(\tilde{x}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $||\tilde{x}'_k - \tilde{x}'_l||\tilde{} < 1/k$, sempre que $l \geq k$. Agora mude de notação e deixe para lá a linha da subseqüência. A conclusão é que podemos supor, sem perda de generalidade, que a seqüência dada satisfaz

$$||\tilde{x}_k - \tilde{x}_l||\tilde{} < \frac{1}{k}, \quad \text{se} \quad l \geq k. \tag{9}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, pegue um representante arbitrário de $\tilde{x}_k$ (isto é, pegue uma seqüência de Cauchy em V pertencente à classe de equivalência $\tilde{x}_k \in \tilde{V}$) e aplique a ele os Problemas 10 e 11-a. O resultado é que podemos escrever $\tilde{x}_k = [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}]$, com $x_n^k \in V$ satisfazendo

$$||x_n^k - x_m^k|| < \frac{1}{n}, \quad \text{se} \quad m \geq n. \tag{10}$$

Provemos (este é o *truque da diagonal*) que $\lim_k \tilde{x}_k = \tilde{y}$, onde $\tilde{y} = [(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Para todos k, l, m e n em $\mathbb{N}$ tais que $l \geq k$, temos:

$$||x_n^k - x_n^l|| \leq ||x_n^k - x_m^k|| + ||x_m^k - x_m^l|| + ||x_m^l - x_n^l||. \tag{11}$$

Segue de (9) que $\lim_m ||x_m^k - x_m^l|| < 1/k$. Logo, existe $m_0 \geq n$ tal que

$$||x_{m_0}^k - x_{m_0}^l|| \;<\; \frac{1}{k}. \tag{12}$$

Podemos substituir $m = m_0$ em (11). Como $m_0 \geq n$, podemos usar (10) para obtermos:

$$||x_n^k - x_n^l|| \leq ||x_n^k - x_{m_0}^k|| + ||x_{m_0}^k - x_{m_0}^l|| + ||x_{m_0}^l - x_n^l|| < \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n}.$$

Isto prova [3] que, para todo n, e para todos $l \geq k$, temos

$$||x_n^k - x_n^l|| \;<\; \frac{2}{n} + \frac{1}{k}.$$

Podemos, claro, fazer $l = n$ na afirmação acima. Concluímos assim que, para todo $n \geq k$, temos

$$||x_n^k - x_n^n|| \;<\; \frac{3}{k}. \tag{13}$$

As estimativas (13) e (10) juntas implicam que, se $m \geq n \geq k$, então

$$||x_n^n - x_m^m|| \leq ||x_n^n - x_n^k|| + ||x_n^k - x_m^k|| + ||x_m^k - x_m^m|| < \frac{6}{k} + \frac{1}{n} \leq \frac{7}{k}.$$

[3] Notem a sutileza (típica) do argumento: embora a gente tenha usado um m_0 que depende de k, de l e de n, o resultado final não vê o m_0, valendo para todo k, l e n.

Dado $\epsilon > 0$, tome um $k_0 > 7/\epsilon$. Para todo $n \geq m \geq k_0$, então, $||x_n^n - x_m^m|| < \epsilon$. Isto é, $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Seja $\tilde{y} = [(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{V}$. A desigualdade (13) também implica que

$$||\tilde{x}_k - \tilde{y}||\tilde{} = \lim_n ||x_n^k - x_n^n|| \leq \frac{3}{k}.$$

Isto, como queríamos, prova que $\tilde{x}_k \to \tilde{y}$ e que $\tilde{V}$ é completo.

Agora suponha que existe um produto interno em V tal que $\langle x, x\rangle = ||x||^2$ para todo $x \in V$. Pelo Problema 4-b, a norma $||\cdot||$ satisfaz a identidade do paralelogramo. Como $\tilde{\imath}$ preserva a norma, a identidade do paralelogramo é satisfeita também pela norma $||\cdot||\tilde{}$, por pares de vetores pertencentes à imagem de $\tilde{\imath}$, que é densa. Segue então dos Problemas 5-b e 7 que a identidade do paralegramo é satisfeita pela norma $||\cdot||\tilde{}$, por todos os pares de vetores em $\tilde{V}$. Segue então do Problema 4-b (agora usamos o "se") que $||\cdot||\tilde{}$ provém de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle\tilde{}$. Finalmente, se x e y pertencem a V, o Problema 4-a e o fato de que $\tilde{\imath}$ preserva a norma implicam que

$$\langle\tilde{\imath}(x), \tilde{\imath}(y)\rangle =$$

$$\frac{1}{4}[(||\tilde{\imath}(x) + \tilde{\imath}(y)||^2 - ||\tilde{\imath}(x) - \tilde{\imath}(y)||^2) - i(||\tilde{\imath}(x) + i\tilde{\imath}(y)||^2 - ||\tilde{\imath}(x) - i\tilde{\imath}(y)||^2)]$$

$$= \frac{1}{4}[(||x + y||^2 - ||x - y||^2) - i(||x + iy||^2 - ||x - iy||^2)] = \langle x, y\rangle,$$

como queríamos. Resta apenas provar a unicidade.

Dados $\tilde{V}$, $\tilde{\tilde{V}}$, $\tilde{\imath}$ e $\tilde{\tilde{\imath}}$ como no enunciado do teorema, segue do fato de $\tilde{\imath}$ ser injetora que existe uma única aplicação linear

$$\imath_0 : \tilde{\imath}(V) \to \tilde{\tilde{\imath}}(V)$$

tal que $\imath_0 \circ \tilde{\imath} = \tilde{\tilde{\imath}}$. Usando esta definição, a igualdade

$$||\tilde{\imath}(x)||\tilde{} = ||x|| = ||\tilde{\tilde{\imath}}(x)||\tilde{\tilde{}}, \text{ se } x \in V$$

torna-se

$$||\imath_0(y)||\tilde{\tilde{}} = ||y||\tilde{}, \quad y \in \tilde{\imath}(V). \tag{14}$$

Como $\tilde{\imath}(V)$ é denso em $\tilde{V}$, segue então do Teorema 2.14 que existe aplicação linear contínua $\imath : \tilde{V} \to \tilde{\tilde{V}}$ cuja restrição a $\tilde{\imath}(V)$ coincide com $\imath_0$. Segue de (14) e da continuidade da norma que vale $||\imath(y)||\tilde{\tilde{}} = ||y||\tilde{}$ para todo y em $\tilde{V}$. Daí, $\imath$ é injetora (pois preserva norma) e tem imagem fechada (pelo Problema 14). Mas a imagem de $\imath$ contém a imagem de $\imath_0$, que é igual à imagem de $\tilde{\tilde{\imath}}$, que é densa. Logo a imagem de $\imath$ é igual a $\tilde{\tilde{V}}$ (vejam a Observação 2.4). Isto é, $\imath$ é o isomorfismo cuja existência queríamos demonstrar. $\square$

Ao contrário do que possa parecer, a demonstração que acabamos de dar no fundo não depende de V ser um espaço vetorial normado. Afinal, só usamos que V é um espaço vetorial normado para provar que $\tilde{V}$ também é um, mas não para provar que $\tilde{V}$ é completo. Repetindo o que fizemos, mas em cada passo trocando $||x - y||$ por $d(x, y)$ e ignorando tudo o mais que se diga sobre a estrutura de espaço vetorial normado de V, demonstra-se também que todo espaço métrico pode ser visto como um subconjunto denso de um único espaço métrico completo. Notem apenas que era desnecessário invocar o Teorema 2.14 e o Problema 14 para provar a unicidade. Eles foram usados apenas por conveniência de redação, mas poderiam ter sido substituídos por argumentos mais simples. Talvez valha a pena o exercício de escrever tudo isso direitinho, mas não para entregar.

Problema **15.** (a) Seja $(W, [\cdot, \cdot])$ um espaço vetorial com produto interno. Mostre que, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em W, então $[x_n, y_n] \to [x, y]$ em $\mathbb{C}$.

(b) Dado um espaço vetorial com produto interno $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, seja $(\tilde{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle\tilde{})$ o espaço vetorial com produto interno construído na demonstração do Teorema 2.15. Mostre que, se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em V, então

$$\langle\, [(x_n)], [(y_n)]\,\rangle\tilde{} \;=\; \lim_n \langle x_n, y_n\rangle.$$

Os espaços L^p.

O fato de $(C[a,b], ||\cdot||_p)$ não ser completo se $1 \leq p < \infty$ (veja o Problema 13) coloca naturalmente a pergunta: será que se pode dar uma descrição de seu completamento mais concreta do que a oferecida pela demonstração do Teorema 2.15? A resposta é sim, mas para tanto precisamos da integral de Lebesgue.

Dado $p > 1$, denotemos por $L^p[a,b]$ o quociente do espaço vetorial

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{C};\, f \text{ é mensurável à Lebesgue e } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pela relação de equivalência

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \;\text{ q.t.p.}$$

Um abuso de notação comum, que também vamos cometer, é não distinguir entre uma função e sua classe de equivalência. A *Desigualdade de Hölder-Minkowski* [15, Theorem 3.5] nos diz que

$$||f||_p \;=\; \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

é uma norma em $L^p[a,b]$. O *Teorema de Riesz-Fisher* [15, Theorem 3.11] nos diz que $L^p[a,b]$ é um espaço de Banach para todo $p \geq 1$ e que $L^2[a,b]$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$C[a,b]$ é denso em $L^p[a,b]$ se $1 \leq p < \infty$ (veja [14, Problem I.18] ou [15, Theorem 3.14]). Isto é, $L^p[a,b]$ é uma possível solução para o problema de achar-se um espaço de Banach contendo $(C[a,b], ||\cdot||_p)$ como subespaço denso. Segue da última parte do Teorema 2.15 que $L^p[a,b]$ é isometricamente isomorfo (isto é, é isomorfo por um isomorfismo que preserva norma) ao espaço $(C[a,b], ||\cdot||_p)\tilde{}$ construído na demonstração do Teorema 2.15. Falando livremente, podemos dizer que esse isomorfismo "deixa fixo o subespaço denso $C[a,b]$" (a afirmação precisa é dada no enunciado do teorema). Ou ainda mais livremente, $L^p[a,b]$ *é* o completamento de $(C[a,b], ||\cdot||_p)$.

Os Teoremas de [15] que usamos na discussão precedente, na verdade, são enunciados e demonstrados para espaços muito mais gerais que $[a,b]$. Eles implicam também que, para cada $1 \leq p < \infty$ e para cada aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, o completamento de

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C};\; f \text{ é contínua}$$
$$\text{e se anula fora de um compacto } K \subset \Omega\}$$

com respeito à norma

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

é *igual* ao espaço $L^p(\Omega)$ das (classes de equivalência das) funções de Ω em $\mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $||f||_p < \infty$. O *suporte* de uma $f \in C_c(\Omega)$ é o menor compacto fora do qual f se anula. Chama-se $C_c(\Omega)$ de *o espaço das funções contínuas de suporte compacto.*

Para algumas aplicações, esta descrição de $L^p(\Omega)$, como sendo o completamento de $(C_c(\Omega), ||\cdot||_p)$, é perfeitamente satisfatória. Mas resultados [4] que envolvam algo além da estrutura de espaço de Banach de $L^p(\Omega)$, ou da estrutura de espaço de Hilbert de $L^2(\Omega)$, em geral não fazem sentido no completamento abstrato.

O completamento de $C_c(\Omega)$ com respeito à norma $||\cdot||_\infty$ (Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário) é o espaço $C_0(\Omega)$ de todas as funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tais que, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$. Vejam [15, Theorem 3.17] para uma demonstração deste fato (enunciado e demonstrado para espaços topológicos de Hausdorff e localmente compactos, classe que inclui os abertos de $\mathbb{R}^n$).

No caso de Ω ser um aberto limitado, $C_0(\Omega)$ coincide com o espaço das funções complexas contínuas em Ω que admitem extensão contínua ao fecho de Ω que se anula na fronteira de Ω. No caso de Ω não ser limitado, requeremos ademais que $f(x)$ tenda a zero quando $|x| \to \infty$. A demonstração da equivalência dessas duas definições de $C_c(\Omega)$ é um belo exercício de topologia do $\mathbb{R}^n$, que vamos omitir.

PROBLEMA **16.** Dado Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, denote por $C(\bar{\Omega})$ o espaço das funções complexas contínuas definidas no fecho de Ω. Mostre que a restrição a Ω, $f \mapsto f|_\Omega$, define uma aplicação linear contínua injetora de $C(\bar{\Omega})$ em $L^2(\Omega)$.

PROBLEMA **17.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \longmapsto f(a) \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $||\cdot||_\infty$, mas não admite extensão linear contínua a $L^1[a,b]$ nem a $L^2[a,b]$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \longmapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $||\cdot||_\infty$, e admite extensões lineares contínuas a $L^1[a,b]$ e a $L^2[a,b]$.

PROBLEMA **18.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto f(0) \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $(C_0(\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$ nem a $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^1(\mathbb{R})$, mas não a $L^2(\mathbb{R})$ nem a $C_0(\mathbb{R})$.

---

[4] Por exemplo, a afirmação de que toda seqüência convergente em $L^p(\Omega)$ possui uma subseqüência convergente ponto-a-ponto em quase toda parte.

(c) Fixada $g \in C_c(\mathbb{R})$ não-nula, mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \;\longmapsto\; \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x) dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, a $L^1(\mathbb{R})$ e a $C_0(\mathbb{R})$.
(d) Seja g a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{-1/4} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \;\longmapsto\; \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \in \mathbb{C}$$

está bem definido, admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$, nem a $C_0(\mathbb{R})$.

Os espaços $H_1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.
Dado Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, denote por $H^1(\Omega)$ o completamento do espaço vetorial com produto interno $(C^1(\bar{\Omega}), \langle \cdot, \cdot \rangle^1)$, e denote por $H_0^1(\Omega)$ o completamento do espaço vetorial com produto interno $(C_0^1(\bar{\Omega}), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, ambos definidos no Problema 2.

Se a é o raio de uma bola centrada na origem contendo Ω, então para toda $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ temos

$$\int |u(x)|^2 dx \;\leq\; 2a^2 \langle u, u \rangle_1. \tag{15}$$

Esta é a *desigualdade de Poincaré*, vejam [10, Seção 4.5] ou [16, Proposition 23.4]. Devo alertá-los, entretanto, de que este é um ponto bem delicado. A demonstração de Treves [16] é para uma u de classe C^∞ e com suporte compacto contido no interior de Ω. Aparentemente, John [10] afirma (o estilo do livro é provar teoremas sem enunciá-los precisamente) que a desigualdade vale para toda $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Mas em um certo ponto da demonstração, ele faz uma hipótese simplificadora sobre a fronteira. Afirmo que as duas demonstrações se aplicam também no caso mais geral, tal como enunciei aqui. Isso será eventualmente incluído em um apêndice, para não atrair demais a atenção de vocês para fora dos objetivos da disciplina.

Encarando a aplicação restrição como uma inclusão (veja o Problema 16), podemos considerar $C(\bar{\Omega})$, assim como seus subespaços $C_0^1(\bar{\Omega})$ e $C^1(\bar{\Omega})$, como subespaços de $L^2(\Omega)$. É o que fazemos no enunciado dos dois problemas seguintes.

Problema **19.** Usando (15), prove que:
(a) Existe uma única aplicação linear e contínua

$$\imath_1 : H_0^1(\Omega) \;\longrightarrow\; L^2(\Omega)$$

cuja restrição a $C_0^1(\bar{\Omega})$ seja igual à identidade.
(b) Existe uma única aplicação linear e contínua

$$\imath_2 : H^1(\Omega) \;\longrightarrow\; L^2(\Omega)$$

cuja restrição a $C^1(\bar{\Omega})$ seja igual à identidade.
(c) Existe uma única aplicação linear injetora, contínua e de imagem fechada

$$\imath_3 : H_0^1(\Omega) \;\longrightarrow\; H^1(\Omega)$$

cuja restrição a $C_0^1(\bar{\Omega})$ seja igual à inclusão de $C_0^1(\bar{\Omega})$ em $C^1(\bar{\Omega})$.
(d) $\imath_1$ é a composião de $\imath_2$ com $\imath_3$, $\imath_1 = \imath_2 \circ \imath_3$.

Quando vale a injetividade de $\imath_1$ e $\imath_2$ (veja a Observação 5.4), nem se menciona a existência das aplicações $\imath_1$, $\imath_2$ e $\imath_3$ construídas no Problema anterior. Diz-se simplesmente que $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço de $H^1(\Omega)$, que é um subespaço de $L^2(\Omega)$.

Problema **20.** Dadas funções $a_1, \cdots, a_n$ e b, contínuas de $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{C}$, defina, para cada $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$,

$$(Lu)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x). \tag{16}$$

Prove que $L : C_0^1(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$ se estende a uma transformação linear contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Problema **21.** Seja $H_0^1(a,b)$ o espaço que se obtém substituindo Ω pelo intervalo aberto limitado (a,b) no espaço definido no Problema 19. Mostre que $H_0^1(a,b)$ é um subespaço de

$$C_0(a,b) = \{f \in C[a,b];\, f(0) = f(1) = 0\};$$

isto é, mostre [5] que existe uma injeção contínua de $H_0^1(a,b)$ em $C_0(a,b)$ cuja restrição a $C_0^1[a,b]$ é a identidade.
Sugestão: Use o Teorema Fundamental do Cálculo para estimar o supremo de uma $u \in C_0^1[a,b]$ em termos da norma de u em $H_0^1(a,b)$.

Operadores densamente definidos.

`Definição` **3.1.** *Um operador densamente definido entre os espaços de Banach X e Y é uma transformação linear (não necessariamente contínua) $T : D \to Y$, onde D é um subespaço denso de X. Quando $X = Y$, diz-se que T é um operador densamente definido em X.*

Um operador densamente definido que seja contínuo é normalmente identificado com sua única extensão contínua a todo o espaço X. Isso explica porque os operadores densamente definidos são frequentemente chamados de *operadores ilimitados*. Vamos evitar essa nomenclatura. Para quem a usa, "ilimitado" não significa "não-limitado", mas apenas "não necessariamente limitado".

`Exemplo` **3.2.** Se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $C_0^1(\bar{\Omega})$ é denso em $L^2(\Omega)$. Na verdade, mesmo sem se supor que Ω é limitado, demonstra-se que o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ de todas de todas funções de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω é denso [6] em qualquer $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. E é óbvio que $C_0^1(\bar{\Omega})$ contém $C_c^\infty(\Omega)$.

O operador L definido em (16) com domínio $C_0^1(\bar{\Omega})$ é portanto um exemplo de um operador densamente definido no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Problema **22.** Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e seja $T : D \to X$ um operador densamente definido em X satisfazendo [7] a seguinte condição: se (x_n) é uma seqüência em D tal que $x_n \to 0$ e Tx_n converge, então $Tx_n \to 0$.

---

[5] Este é um caso particular de um dos *teoremas de imersão* de Sobolev [6, Theorem 7.10].

[6] Isto se prova usando convolução. O caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ é demonstrado em [5, Proposition 8.17]. O caso geral decorre deste caso particular, usando-se também [5, Lemma 8.18].

[7] Isto é, T é *fechável*, de acordo com a Definição 11.6. Esta hipótese só é necessária para os dois últimos itens.

(a) Mostre que $|||x||| = ||Tx|| + ||x||$ é uma norma em D.
(b) Mostre que T, visto como uma transformação linear entre os espaços vetoriais normados $(D, |||\cdot|||)$ e $(X, ||\cdot||)$, é contínua.
(c) Seja $\tilde{D}$ o completamento de D com respeito à norma $|||\cdot|||$. Mostre que existe uma única aplicação linear injetora contínua de $\tilde{D}$ em X cuja restrição a D seja igual à identidade.
(d) Mostre que, se T, visto como uma transformação linear de $(D, ||\cdot||)$ em $(X, ||\cdot||)$, é contínua, então [8] a injeção do item (c) é sobrejetora com inversa contínua.

Problema **23.** No Problema 22, faça $X = L^2[a,b]$, $D = C_0^1[a,b]$, $Tu = u'$ para toda $u \in D$. Verifique que $\tilde{D} = H_0^1(a,b)$.

Problema **24.** Seja p real, $p \geq 1$. No Problema 22, faça $X = \ell^p$, D igual ao conjunto de todas as seqüências complexas (x_n) que se anulam exceto para finitos valores de n, e defina em D o operador

$$D \ni \mathbf{x} = (x_n) \longmapsto T\mathbf{x} = (nx_n) \in X.$$

(a) Mostre que T satisfaz a hipótese do Problema 22.
(b) Dê uma descrição de $\tilde{D}$ que não faça menção a D nem a T.

4. Projeções em espaços de Hilbert (2 de setembro)

Teorema 4.1. *Seja M um subespaço fechado do espaço de Hilbert H. Para cada $x \in H$, existe um único $z \in M$ tal que*

$$||z - x|| \leq ||y - x||, \quad \textit{para todo} \quad y \in M.$$

Demonstração: Dado $x \in H$, seja

$$d = \inf_{y \in M} ||y - x||.$$

Queremos provar que existe um único $z \in M$ tal que $||z - x|| = d$.

Seja (y_n) uma seqüência em M tal que $||y_n - x|| \to d$. Usando a identidade do paralelogramo (Problema 4), obtemos:

$$\begin{aligned} ||y_n - y_m||^2 &= ||(y_n - x) + (y_m - x)||^2 \\ &= 2||y_n - x||^2 + 2||y_m - x||^2 - ||y_n + y_m - 2x||^2 \\ &= 2||y_n - x||^2 + 2||y_m - x||^2 - 4||x - \frac{y_n + y_m}{2}||^2. \end{aligned}$$

Como $(y_n + y_m)/2$ pertence a M, vem:

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2||y_n - x||^2 + 2||y_m - x||^2 - 4d^2. \tag{17}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies ||y_n - x||^2 < d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Então, se n e m forem maiores que N, a estimativa (17) implica que $||y_n - y_m|| < \epsilon$. Isto é, (y_n) é de Cauchy. Como H é completo, existe $z \in H$ tal que $y_n \to z$. Como M é fechado, $z \in M$. Como a norma é contínua,

$$||z - x|| = \lim_n ||y_n - x|| = d,$$

[8] Vale também a seguinte recíproca. Se a injeção do item (c) for sobrejetora, então sua inversa e T são automaticamente contínuos. Veremos que esta é uma das muitas e surpreendentes conseqüências do Teorema de Baire em Análise Funcional

o que prova a existência.

Se $\tilde{z} \in M$ é tal que $||\tilde{z} - x|| \leq ||y - x||$ para todo $y \in M$, então $||\tilde{z} - x|| = d$. Daí vem, por argumentos análogos aos anteriores:

$$||\tilde{z} - z||^2 = 2||\tilde{z} - x||^2 + 2||z - x||^2 - 4||\frac{z + \tilde{z}}{2} - x||^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

Logo $z = \tilde{z}$. □

Notem que só usamos que M é subespaço para provar que $(x + y)/2 \in M$ se x e y estão em M. Ou seja, a demonstração acima mostra também que a distância de qualquer subconjunto convexo e fechado a um ponto em um espaço de Hilbert é sempre assumida. A distância de um fechado F qualquer a um ponto fora dele pode não ser assumida, se F não for convexo. É o caso, por exemplo, da distância da origem ao gráfico da função $f(x) = \cos(1/x)$, $x \neq 0$, visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$.

`Definição` **4.2.** *Dado M um subespaço qualquer de um espaço de Hilbert H, o complemento ortogonal de M em H é o subespaço $M^\perp \subseteq H$ dado por:*

$$M^\perp = \{x \in H;\, \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}.$$

É fácil ver que $M \cap M^\perp = \{0\}$, qualquer que seja o M.

`Teorema` **4.3.** `(Existência de projeções)` Seja M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Para todo $x \in H$, existem únicos $z \in M$ e $w \in M^\perp$ tais que $x = z + w$.

Demonstração: Dado $x \in H$, use o Teorema 4.1 para obter $z \in M$ tal que

$$||z - x|| = \inf_{y \in M} ||y - x|| = d.$$

Dados quaisquer $y \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, temos então:

$$d^2 \leq ||x - (z + ty)||^2 = ||x - z||^2 + t^2||y||^2 + 2t \cdot Re\langle x - z, y\rangle.$$

Isto é,

$$||y||^2 t^2 + 2t \cdot Re\langle x - z, y\rangle \geq 0, \quad \text{para todo } \; t \in \mathbb{R},$$

logo $Re\langle x - z, y\rangle = 0$.

Trocando y por iy no que acabamos de provar, vem

$$0 = Re\langle x - z, iy\rangle = Re(i\langle x - z, y\rangle) = -Im\langle x - z, y\rangle,$$

logo $\langle x - z, y\rangle = 0$.

Definindo-se $w = x - z$, tem-se a existência. A unicidade decorre imediatamente de $M \cap M^\perp = \{0\}$. □

PROBLEMA **25.** Seja M um subespaço de um espaço de Hilbert H. Denotando por $\overline{M}$ seu fecho (Definição 2.3), mostre que:
(a) $M^\perp$ é fechado.
(b) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.
(c) $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.
(d) M é denso em H se e somente se $M^\perp = \{0\}$.
Sugestões: No (a) e no (b), use Cauchy-Schwarz. Para provar que $(M^\perp)^\perp$ está contido em $\overline{M}$, use o Teorema 4.3.

A norma de uma transformação linear.

Dada $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua entre espaços vetoriais normados, segue do Teorema 2.5 que

$$\min\{C \geq 0;\ ||Tx|| \leq C||x|| \text{ para todo } x \in X\} \tag{18}$$

existe e é finito. É fácil ver então que este número é igual a

$$\sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}. \tag{19}$$

Se $x \neq 0$, temos

$$\frac{||Tx||}{||x||} = \left|\left| T\left(\frac{x}{||x||}\right) \right|\right| \quad \text{e} \quad \left|\left| \frac{x}{||x||} \right|\right| = 1.$$

Daí, o supremo em (19) é igual a

$$\sup\{||Tx||;\ ||x|| \leq 1\}. \tag{20}$$

.

`Definição` **4.4.** *Seja $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares contínuas entre os espaços vetoriais normados X e Y. Para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, denotaremos por $||T|| \in [0,\infty)$ o número real que aparece em* (20)*,* (19) *e* (18)*. Quando Y é o corpo do espaço vetorial X, denotamos $\mathcal{L}(X,Y)$ por X^*. Chamamos X^* de* o dual *de X e chamamos seus elementos de* funcionais lineares contínuos *(já usamos esta nomenclatura antes). Quando $X = Y$, denotamos $\mathcal{L}(X,Y)$ por $\mathcal{L}(X)$ e chamamos seus elementos de operadores contínuos, ou limitados, em X.*

É fácil ver que $||\cdot|| : \mathcal{L}(X,Y) \to [0,\infty)$ satisfaz os axiomas (i), (ii) e (iv) da Definição 1.9. Provemos que satisfaz também a desigualdade triangular e, portanto, que $||\cdot||$ é uma norma em $\mathcal{L}(X,Y)$. Dados S e T em $\mathcal{L}(X,Y)$, para cada $x \in X$ com $||x|| = 1$, temos:

$$||Sx + Tx|| \leq ||Sx|| + ||Tx|| \leq ||S|| + ||T||.$$

Logo $||S + T|| = \sup\{||(S+T)(x)||;\ ||x|| = 1\} \leq ||S|| + ||T||$, como queríamos.

A aplicação linear $\tilde{T}$ construída no Teorema 2.14 tem norma igual à de T. Isto decorre da última afirmação do enunciado daquele teorema: que se $C \geq 0$ é tal que $||Tx|| \leq C||x||$ para todo $x \in D$, então também temos que $||\tilde{T}x|| \leq C||x||$ para todo $x \in X$.

`Definição` **4.5.** *Esta norma que acabamos de definir em $\mathcal{L}(X,Y)$ é chamada de norma-de-operador. A norma-de-operador $||A||_{\mathtt{op}}$ de A, uma matriz complexa n por m, é a norma-de-operador da transformação linear de $\mathbb{C}^m$ em $\mathbb{C}^n$ (munidos da norma euclidiana) definida por A da maneira canônica.*

Problema **26.** (a) Mostre que, se A é uma matriz real n por m, $||A||_{\mathtt{op}}$ também é igual à norma-de-operador da transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ definida por A.
(b) Mostre que

$$\left|\left| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right|\right|_{\mathtt{op}} = 3.$$

Problema **27.** Calcule as normas dos funcionais lineares contínuos que definimos nos Problemas 17 e 18.

PROBLEMA **28.** Dada (c_n) uma seqüência complexa limitada, mostre que

$$(x_n) \longmapsto (c_n x_n)$$

define um operador limitado em ℓ^p, para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Calcule a norma deste operador.

PROBLEMA **29.** Dada $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e limitada, mostre que a multiplicação das funções de suporte compacto por a ,

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto af \in C_c(\mathbb{R}),$$

se estende a um operador linear contínuo em $L^p(\mathbb{R})$, para todo $p > 1$ real, e a um operador linear contínuo em $C_0(\mathbb{R})$. Mostre que a norma de todos esses operadores é igual ao supremo de $|a|$.

PROBLEMA **30.** Seja $V : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador [9] dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Mostre que $||V^n|| \leq 1/(n-1)!$ ($V^n = V \circ \cdots \circ V$, n fatores).
Dicas: O caso $n = 1$ é fácil. Para resolver o caso $n = 2$, troque a ordem de integração numa integral dupla. O passo de indução deve parecer natural, depois de resolvido o caso $n = 2$.

Projeções.

Dado M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, para cada $x \in H$, defina Px como sendo o único elemento de M tal que $x - Px$ pertence a $M^\perp$ (Px é o z do Teorema 4.3). Segue do Teorema 4.3 que $P : H \to H$ é uma transformação linear, que $P^2 = P$, que $x = Px$ se e somente se $x \in M$, e que a imagem de P é igual a M.

Como Px e $x - Px$ são ortogonais,

$$||Px||^2 = ||x||^2 + ||x - Px||^2, \text{ para todo } x \in H,$$

logo $||Px|| \leq ||x||$ para todo $x \in H$, logo $||P|| \leq 1$. Como $||Px|| = ||x||$ para todo $x \in M$, vem que $||P|| \geq 1$ (logo $||P|| = 1$) se $M \neq \{0\}$.

`Definição` **4.6.** *Seja M um subespaço fechado de um espaço de Banach X. Uma* projeção sobre M *é uma transformação linear contínua $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$ e a imagem de P é igual a M.*

Acabamos de ver que, dado qualquer subespaço fechado de um espaço de Hilbert, existe uma projeção sobre ele de norma igual a um. Espaços de Banach mais gerais podem ter subespaços fechados sem projeções. No caso de um subespaço fechado M de um espaço de Hilbert, a projeção construída acima é chamada de *projeção ortogonal* sobre M (pois $x - Px$ e Px são ortogonais para todo $x \in M$).

PROBLEMA **31.** Mostre que, se M é um subespaço fechado de um espaço de Banach X tal que existe uma projeção sobre M, então X possui um subespaço fechado N tal que $X = M \oplus N$.

Adiante, como mais uma conseqüência do Teorema de Baire, veremos que vale a recíproca da afirmação precedente: dado M subespaço fechado de um espaço de Banach X, existe um subespaço fechado N tal que $X = M \oplus N$ se e somente se existe uma projeção sobre M.

[9] Este é o *operador de Volterra*. O problema implica que ele é *quase-nilpotente*: $||V^n||^{1/n} \to 0$.

Problema **32.** Mostre que

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

é um operador linear contínuo em ℓ^2. Mostre que o núcleo deste operador é um subespaço fechado de ℓ^2 e descreva a projeção ortogonal sobre ele.

O dual de um espaço de Hilbert.

Seja H um espaço de Hilbert. Para cada $x \in H$, definamos um funcional linear $\langle x| : H \to \mathbb{C}$ por $\langle x|(y) = \langle x, y\rangle$ para todo $y \in H$. Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\langle x|(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

e, portanto, $\langle x|$ é contínuo, de norma menor ou igual a $||x||$. Vale também a igualdade, $||\langle x|\,|| = ||x||$. Para provar isto, basta provar que existe y de norma unitária tal que $\langle x, y\rangle = ||x||$. Se $x = 0$, qualquer y serve. Se $x \neq 0$, tome $y = x/||x||$.

Temos portanto uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot| : H & \longrightarrow & H^* \\ x & \longmapsto & \langle x| \end{array} \tag{21}$$

que preserva a norma, preserva a soma, e satisfaz $\langle \alpha x| = \bar{\alpha}\langle x|$ para todo $x \in H$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. O próximo teorema afirma que $\langle\cdot|$ é sobrejetora.

5. O Lema de Riesz (13 de setembro)

O teorema seguinte, conhecido como Lema de Riesz, foi demonstrado independentemente por Fréchet e Riesz. Os dois artigos apareceram num mesmo exemplar do *Comptes Rendus* da Academia de Ciências de Paris, em 1907, bem antes de os espaços de Hilbert terem sido definidos (vejam as notas bibliográficas de [14, Capítulo II]).

Teorema 5.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Para todo funcional linear contínuo $T : H \to \mathbb{C}$, existe um único $y \in H$ tal que $T = \langle y|$.*

Demonstração: Se $T = 0$, podemos tomar $y = 0$. Basta, portanto, supor $T \neq 0$. Seja N o núcleo de T, $N = \{x \in H; Tx = 0\}$. Como T é contínuo, N é fechado (pois, se (x_n) é uma seqüência em N e $x_n \to x$, então $0 = Tx_n \to Tx$, logo $x \in N$). Como T é não nulo, existe $x \in H$ que não pertence a N. Seja $z \in N$ tal que $w = x - z \in N^\perp$ (z existe, pelo Teorema 4.3). w não é nulo pois, se fosse nulo, x pertenceria a N. Tome

$$y = \frac{\overline{T(w)}}{||w||^2} w.$$

Se $x' \in N$, então $\langle y, x'\rangle = 0 = Tx'$. Se x' é um múltiplo de w, $x' = \alpha w$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\langle y, x'\rangle = \langle y, \alpha w\rangle = \langle \frac{\overline{T(w)}}{||w||^2} w, \alpha w\rangle = \alpha T(w) = T(x').$$

Isto prova que T e $\langle y|$ coincidem no subespaço gerado por w e N. Isso dá o espaço inteiro, pois todo $x' \in H$ pode ser escrito como a soma de um vetor em N com um múltiplo de w,

$$x' = \left(x' - \frac{T(x')}{T(w)} w\right) + \frac{T(x')}{T(w)} w$$

(note que $Tw \neq 0$, pois $0 \neq w \in N^{\perp}$ e $N \cap N^{\perp} = \{0\}$). Isto prova a existência.

A unicidade decorre de $\langle \cdot |$ ser injetora, pois preserva norma. □

Uma conseqüência do Teorema 5.1 é que o dual de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert. Torno esta afirmação mais precisa no enunciado do problema seguinte. Depois veremos que o dual de qualquer espaço vetorial normado, munido da norma-de-operador, também é um espaço de Banach.

PROBLEMA **33.** Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que $[\,\langle x|, \langle y|\,] = \langle y, x\rangle$ define um produto interno $[\cdot,\cdot]$ em H^* e que a norma induzida por este produto interno coincide com a norma-de-operador em H^*. Conclua então que H^* é completo.

O Problema de Dirichlet.

Nesta subseção, mostramos como o Lema de Riesz implica a existência e a unicidade da solução fraca do *problema de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{22}$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sua fronteira, e Δ denota o laplaceano,

$$\Delta u \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Esta é uma importante aplicação, tanto do ponto de vista histórico, quanto pelo amplo uso que se tem feito desta técnica no estudo de outros problemas de valor de fronteira para equações diferenciais parciais.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ com fecho contido na bola de centro na origem e raio a. Dadas $f \in C(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C_0^1(\bar{\Omega})$ (espaços definidos nos Problemas 16 e 2, respectivamente), a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $L^2(\Omega)$, seguida da desigualdade de Poincaré (15), implicam que

$$\left| \int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx \right| \;\leq\; \sqrt{2}a \cdot \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

onde denotamos por $|\cdot|$ tanto o valor absoluto em $\mathbb{C}$ quanto a norma euclideana em $\mathbb{C}^n$, e por $\nabla\varphi$ o gradiente de φ.

Lembrem que definimos $H_0^1(\Omega)$ como sendo o completamento de $C_0^1(\bar{\Omega})$ munido do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ do Problema 2. A estimativa (23) significa, precisamente, que o funcional linear $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$,

$$\lambda(\varphi) \;=\; -\int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx,$$

a princípio definido apenas no subespaço denso $C_0^1(\bar{\Omega})$, se estende a um funcional linear contínuo $\tilde{\lambda} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ de norma menor ou igual a $\sqrt{2}a$ vezes a norma de f em $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 5.1, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, \varphi\rangle_1 \;=\; \tilde{\lambda}(\varphi) \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Isto dá, em particular:

$$\langle u, \varphi\rangle_1 \;=\; -\int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx, \text{ para toda } \varphi \in C_0^1(\bar{\Omega}). \tag{24}$$

`Definição` **5.2.** *Dada $f \in C(\bar{\Omega})$, dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma* solução fraca *para o problema* (22) *se vale* (24). *Uma* solução clássica *de* (22) *é uma função u de classe C^2 em Ω, satisfazendo $\Delta u = f$ em Ω, possuindo extensão contínua a $\bar{\Omega}$ que se anula na fronteira.*

Sob certas condições, toda solução fraca é clássica, e vice-versa. Falaremos um pouco disso após demonstrarmos a existência e a unicidade da solução fraca.

`Teorema` **5.3.** *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Para toda $f \in C(\bar{\Omega})$, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema de Dirichlet* (22).

Demonstração: A discussão que precede a Definição 5.2 demonstra a existência.

Se u_1 e u_2 são soluções fracas de (22), $\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle_1 = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1\bar{\Omega})$. Isto é, $u_1 - u_2$ pertence ao complemento ortogonal de $C_0^1(\bar{\Omega})$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $C_0^1(\bar{\Omega})$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, segue então do Problema 25-d que $u_1 - u_2 = 0$. □

Se a fronteira $\partial\Omega$ for uma superfície (de dimensão $n-1$) de classe C^1, então é possível demonstrar que uma solução fraca de (22) é necessariamente uma solução clássica. O passo mais difícil [10] é provar que toda solução fraca de (22), da qual se sabe a princípio apenas que está em $H_0^1(\Omega)$, na verdade pertence a $C^2(\Omega)$ e tem extensão contínua que se anula na fronteira.

Vamos aqui apenas dar condições suficientes para que uma solução fraca seja solução clássica. Suponhamos que a fronteira de Ω é de classe C^1, e que u é uma solução fraca de (22) que pertença a $C_0^2(\bar{\Omega})$, isto é, u é a restrição a $\bar{\Omega}$ de uma função de classe C^2 definida em um aberto contendo $\bar{\Omega}$ que se anula na fronteira de Ω. Provemos que u é uma solução clássica de (22).

A hipótese sobre a fronteira nos permite aplicar o *teorema da divergência*, isto é, o teorema de Stokes para abertos de $\mathbb{R}^n$, que enunciamos a seguir. Se $\vec{F} = (F^1, \cdots, F^n)$ é um campo vetorial com componentes $F^j \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\partial\bar{\Omega}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \;=\; \int_{\Omega} \mathtt{div}\vec{F}\, dx, \tag{25}$$

onde $\mathtt{div}\vec{F} = \sum_j \partial F^j/\partial x_j$, $\vec{n}$ é o vetor normal à fronteira e "$\cdot$" denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Para cada $\varphi \in C_0^1(\bar{\Omega})$, apliquemos (25) ao campo $\vec{F} = \varphi\overline{\nabla u}$. Como φ se anula na fronteira, a integral do lado esquerdo de (25) se anula para este $\vec{F}$. Derivando o produto e usando que $\mathtt{div}\nabla u = \Delta u$, obtemos então:

$$\langle u, \varphi\rangle_1 = \int_{\Omega} \overline{\nabla u}\cdot\nabla\varphi\, dx = -\int_{\Omega} (\overline{\Delta u})\varphi\, dx. \tag{26}$$

Juntas, (24) e (26) implicam que

$$\int \overline{(\Delta u - f)}\varphi\, dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_0^1(\bar{\Omega}). \tag{27}$$

Ou seja, $\Delta u - f$ (que está em $L^2(\Omega)$ pelo Problema 16) pertence ao complemento ortogonal em $L^2(\Omega)$ de $C_0^1(\bar{\Omega})$, que é denso em $L^2(\Omega)$ (veja nota de rodapé na página 17). O Problema 25-d então implica que $\Delta u - f = 0$, como queríamos.

`Observação` **5.4.** $(\cdots)$

[10] Isto é bem mais complicado do que aplicar o Lema de Riesz. Os resultados de [16, Seção 29] implicam mais do que afirmamos aqui. Um tratamento mais elementar, mas incompleto, é dado em [10, Seção 4.5].

Adjuntos.

Nesta subseção tratamos de uma conseqüência teórica do Lema de Riesz. É usando o Teorema 5.1 que se define o adjunto de um operador limitado entre espaços de Hilbert, ou de um operador densamente definido em um espaço de Hilbert, generalizando-se assim a operação de tomar o transposto-conjugado de matrizes complexas. Este é o ponto de partida de uma longa caminhada (da qual só percorreremos o começo) em direção a diversas generalizações do teorema espectral da Álgebra Linear.

`Teorema` **5.5.** *Dada uma transformação linear contínua $T : H_1 \to H_2$ entre os espaços de Hilbert H_1 e H_2, existe uma única uma transformação linear contínua $T^* : H_2 \to H_1$ tal que*

$$\langle T^* x, y\rangle \;=\; \langle x, Ty\rangle \text{ para todos } x \in H_2 \text{ e } y \in H_1 \tag{28}$$

(denotamos ambos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, o produto interno de H_1 e o de H_2). Além disso, as normas de operador de T e T^* são iguais (veja a Definição 4.5).

Demonstração: Para cada $x \in H_2$, seja $\lambda_x : H_1 \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por $\lambda_x(y) = \langle x, Ty\rangle$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição de $||T||$ implicam, para todo $y \in H_1$, que

$$|\lambda_x(y)| = |\langle x, Ty\rangle| \leq ||x|| \cdot ||Ty|| \leq (||T|| \cdot ||x||) \cdot ||y||.$$

Ou seja, λ_x é limitado e $||\lambda_x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$. Segue do Teorema 5.1 que existe um único $z \in H_1$ tal que

$$\langle x, Ty\rangle \;=\; \langle z, y\rangle.$$

Segue de a aplicação definida em (21) preservar norma que $||z|| = ||\lambda_x||$, logo $||z|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

Como existe um único z tal que $z = \lambda_x$, se existir a tal T^* do enunciado, ela terá de satisfazer $T^*x = z$. Tome então esta equação como a definição de T^*. Já provamos que vale (28) e que $||T^*x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$ para todo $x \in H_2$.

Para provarmos que T é linear, notem que temos, para todos x_1 e x_2 em H_2, para todo y em H_1 e para todo complexo α:

$$\langle x_1 + \alpha x_2, Ty\rangle = \langle x_1, Ty\rangle + \bar{\alpha}\langle x_2, Ty\rangle =$$

$$\langle T^*x_1, y\rangle + \bar{\alpha}\langle T^*x_2, y\rangle = \langle T^*x_1 + \alpha T^*x_2, z\rangle.$$

Segue agora da unicidade da escolha do z que $T^*(x_1 + \alpha x_2) = T^*x_1 + \alpha T^*x_2$.

Isto prova o teorema, a menos da igualdade $||T^*|| = ||T||$. Até aqui, provamos apenas que $||T^*|| \leq ||T||$. Mas notem que, tomando o complexo conjugado em ambos os lados de (28), obtemos

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^*x\rangle, \text{ para todos } y \in H_1 \text{ e } x \in H_2.$$

Isto é, $(T^*)^* = T$. Logo $||T|| = ||(T^*)^*|| \leq ||T^*||$, como queríamos. □

Verifique que, de fato, se A é uma matriz complexa n por m, então o adjunto do operador limitado $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ definido por A da maneira canônica é igual ao operador definido pelo transposto conjugado de A.

Problema **34.** Fazendo $p = 2$, ache o adjunto dos operadores limitados definidos nos Problemas 28 e 29.

Problema **35.** (a) Ache o adjunto da transformação linear contínua $L^2[a,b] \to \mathbb{C}$ definida no Problema 17-b.
(a) Ache o adjunto da transformação linear contínua $L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definida no Problema 18-c.

Problema **36.** Sejam H_1, H_2 e H_3 espaços de Hilbert. Mostre que, se $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ e $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, então a composição $S \circ T$ pertence a $\mathcal{L}(H_1, H_3)$ e satisfaz

$$||S \circ T|| \leq ||S|| \cdot ||T|| \quad \text{e} \quad (S \circ T)^* = T^* \circ S^*. \tag{29}$$

Definição 5.6. *Uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ é um conjunto A munido de aplicações $+ : A \times A \to A$, $\circ : A \times A \to A$ e $\cdot : \mathbb{C} \times A \to A$ tais que $(A, +, \circ)$ é um anel, $(A, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e*

$$\alpha \cdot (x \circ y) = (\alpha \cdot x) \circ y = x \circ (\alpha \cdot y)$$

para todos x e y em A e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Define-se álgebra sobre $\mathbb{R}$ trocando-se $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ no que acabamos de falar.

Normalmente omitiremos os sinais que indicam as "multiplicações" ($\circ$ e $\cdot$). Escreveremos, por exemplo, apenas $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Exemplo 5.7. Os *quatérnios* [7, Seção III.1] são uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, mas não sobre $\mathbb{C}$, pois $(ij)k = k^2 = -1 \neq 1 = -j^2 = j(ik)$.

Definição 5.8. *Uma* involução *numa álgebra complexa A é uma aplicação $* : A \to A$ tal que, para todos x e y em A e para todo α em $\mathbb{C}$, temos*

$$(x + \alpha y)^* = x^* + \bar{\alpha} y^*, \quad (x^*)^* = x \quad e \quad (xy)^* = y^* x^*. \tag{30}$$

Exemplo 5.9. A demonstração do Teorema 5.5 mostra que $(T^*)^* = T$, para todo $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ (veja a Definição 4.4). Isso, junto com o Problema 36, implicam então que, se H é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra com involução (a involução sendo a operação de tomar o adjunto de um operador).

Seja agora T é um operador densamente definido em um espaço de Hilbert H, e seja D seu domínio. Defina D^* como sendo igual ao conjunto de todos os $x \in H$ tais que o funcional linear

$$D \ni y \longmapsto \langle x, Ty \rangle \in \mathbb{C}$$

é contínuo. Sendo este o caso, este funcional linear admite uma única extensão a um funcional linear contínuo de H em $\mathbb{C}$. Logo existe, pelo Lema de Riesz, um único $z \in H$ tal que

$$\langle x, Ty \rangle = \langle z, y \rangle \quad \text{para todo} \quad y \in D.$$

É fácil ver que a aplicação $D^* \ni x \mapsto z \in H$ é linear. Se D^* for denso, diz-se então que T é *adjuntável*. Define-se T^*, o adjunto de T, como sendo o operador densamente definido

$$D^* \ni x \longmapsto T^* x = z \in H.$$

Em outras palavras o domínio de T^* é o conjunto de todos os x tais que existe z (igual então a T^*x) tal que, para todo y no domínio de T vale a igualdade

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Note que, no caso em que $T : D \to H$ se estende a um elemento de $\mathcal{L}(H)$, as duas definições de adjunto coincidem.

PROBLEMA **37.** Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e sejam $a_1, \cdots, a_n$ pertencentes a $C^1(\bar{\Omega})$. Seja L o operador densamente definido em $L^2(\Omega)$ de domínio $C_0^1(\bar{\Omega})$, com Lu dado por (16) para cada u do domínio. Mostre que L é adjuntável.
Sugestão: Use que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e integre por partes. Para não se complicar demais com questões de Cálculo Integral, pode supor que Ω é um retângulo (mas esta hipótese é desnecessária).

`Definição` **5.10.** *Um operador densamente definido T é simétrico se o domínio de T^* contém o domínio de T e se a restrição de T^* ao domínio de T é igual a T. Um operador simétrico T é autoadjunto se o domínio de T^* é igual ao de T.*

PROBLEMA **38.** Seja T o operador densamente definido em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dado por $Tf = -if'$.
(a) Mostre que T é simétrico.
(b) Mostre [11] que $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ pertence ao domínio de T^* e conclua então que T não é autoadjunto.

PROBLEMA **39.** Seja D o subespaço de ℓ^2 que consiste de todas as seqüências $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $(jx_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ^2. Defina $T : D \to \ell^2$ por $T\mathbf{x} = (jx_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Mostre que T é autoadjunto.

6. Bases Hilbertianas I (16 de setembro)

O que se costuma chamar de base de um espaço de Hilbert não é uma base no sentido da Álgebra Linear. Para evitar confusão, tentaremos sempre usar os termos *base hilbertiana* ou *conjunto ortonormal completo* para designar os tais conjuntos, que serão definidos e terão suas principais propriedades expostas nesta e na próxima aula.

Antes de tratarmos de bases hilbertianas, estudaremos o significado de soma infinita em espaços vetoriais normados

`Definição` **6.1.** *Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de elementos de um espaço vetorial normado X é* somável *se existe um $x \in X$ (chamado de soma da família) tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq I$ finito tal que, para todo F' finito, $F \subseteq F' \subseteq I$, temos*

$$|| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x|| < \epsilon. \text{ Neste caso, escreve-se: } \sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x.$$

Às vezes, apenas para enfatizar a diferença entre esta e outras noções de soma infinita, chamaremos uma família somável de *incondicionalmente somável.* A razão para o uso do advérbio "incondicionalmente" deve ficar clara depois das proposições seguintes.

`Proposição` **6.2.** *Seja I infinito e enumerável. Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ em um espaço normado é somável, e sua soma é x, se e somente se, para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$,*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)} \;=\; x. \tag{31}$$

[11]Neste item, é preciso usar a descrição de $L^2(\mathbb{R})$ como o conjunto das (classes de equivalência das) funções cujo módulo ao quadrado tem integral (de Lebesgue) finita.

Demonstração: Suponha que $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ e seja $\varphi : \mathbb{N} \to I$ uma bijeção. Para todo $\epsilon > 0$, seja F o subconjunto finito de I dado pela Definição 6.1. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m_0)\}$. Se $m \geq m_0$, então $F \subseteq \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m)\}$, então

$$||\sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)} - x|| \,<\, \epsilon,$$

o que prova (31).

Provemos agora que, se é falso que $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$, então existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$ tal que (31) é falsa. Pela Definição 6.1, x não ser a soma da família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ significa que

(32) $\quad \exists\, \epsilon > 0;$ tal que $\forall\, F \subseteq I,\ F$ finito; $\exists\, F'$ finito, $F \subseteq F' \subseteq I;$ tal que

$$||\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x|| \geq \epsilon. \tag{33}$$

Enumere I, ou seja, escreva-o como $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\}$.

Aplicando (32) com $\{\alpha_1\}$ no lugar de F, vemos que I possui um subconjunto finito F_1, o F' produzido por (32), tal que $\alpha_1 \in F_1$ e vale (33) para F_1. Por indução, suponha que existem subconjuntos finitos de I, $F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n$, tais que, para todo j de 1 a n, $\alpha_j \in F_j$ e vale (33) se substituirmos F_j no lugar de F'. Aplicando então (32) com $F_n \cup \{\alpha_n\}$ no lugar de F, obtemos F_{n+1} finito, $F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq I$, tal que $\alpha_{n+1} \in F_{n+1}$ e vale (33) se substituirmos $F' = F_{n+1}$.

A união de todos os F_n, $n \in \mathbb{N}$, é igual a I, pois $\alpha_n \in F_n$ para todo n. Podemos então enumerar cada F_n e usar essas enumerações para definir uma seqüência $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n \;=\; \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m_n)\}.$$

Claro que $m_n \to \infty$, pois I é infinito. A seqüência $s_m = \sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)}$ não converge para x, pois a subseqüência $s'_n = s_{m_n}$ satisfaz $||s'_n - x|| \geq \epsilon$ para todo n. $\square$.

Proposição 6.3. *Se a família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável em um espaço normado, então $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ é enumerável.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, seja $F \subseteq I$ finito tal que, para todo F' finito com $F \subseteq F' \subseteq I$, temos $||\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x|| \,<\, \epsilon$. Se $\alpha_0 \notin F$, então

$$\begin{aligned} ||x_{\alpha_0}|| \;&=\; ||(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha) - (x - \sum_{\alpha\in F\cup\{\alpha_0\}} x_\alpha)|| \\ &\leq\; ||(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha)|| + ||(x - \sum_{\alpha\in F\cup\{\alpha_0\}} x_\alpha)|| \,<\, 2\epsilon, \end{aligned}$$

pois F e $F \cup \{\alpha_0\}$ contêm F.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplique o que fizemos no parágrafo anterior a $\epsilon = (2n)^{-1}$, chamando de F_n o finito F assim obtido. Concluímos então que I possui subconjuntos finitos $F_1, F_2, \cdots$ tais que $||x_\alpha|| < 1/n$ se $\alpha \notin F_n$. Logo,

$$I_n \;=\; \{\alpha \in I; ||x_\alpha|| \geq 1/n\} \tag{34}$$

é finito para todo n, pois está contido em F_n.

Isto prova que o conjunto I' definido no enunciado é enumerável, pois é união enumerável de finitos. □

Proposição 6.4. *Seja* $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ *uma família em um espaço normado* X*, seja* $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ *e seja* $x \in X$*. Temos:*

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x \iff \sum_{\alpha \in I'} x_\alpha = x \ .$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, se F é um finito que faz o serviço exigido pela Definição 6.1 para a soma da esquerda no enunciado desta proposição, então $F \setminus I'$ faz o serviço para a soma da direita. E se F faz o serviço para a da direita, faz também para a da esquerda. □

Observação 6.5. O conteúdo das três proposições precedentes pode ser resumido na seguinte afirmação. Uma família em um espaço normado é somável se e somente se (i) ela só é diferente de zero para um conjunto enumerável de índices e (ii) enumerando esse conjunto de índices de qualquer maneira, as somas parciais dessa família formam uma seqüência convergente, e o valor do limite não depende de como os índices são enumerados.

Problema **40.** (a) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Mostre que, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família somável em X, então $\{Tx_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família somável em Y e temos

$$\sum_{\alpha \in I} Tx_\alpha = T(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha).$$

(b) Mostre que, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$ são famílias somáveis em X, então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\{x_\alpha + \lambda y_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável e

$$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + \lambda y_\alpha) \ = \ \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \ + \ \lambda \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

Depois desse prelúdio, chegamos à principal definição desta aula.

Definição 6.6. *Um* conjunto ortonormal completo *ou* maximal *de um espaço vetorial com produto interno* V *é um subconjunto ortonormal de* V (*veja a Definição 1.5*)*, que não está contido em nenhum outro subconjunto ortonormal. Conjuntos ortonormais maximais são também chamados* bases hilbertianas.

Observação 6.7. Um subconjunto ortonormal $\mathfrak{B} \subset V$ é completo se e somente se

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{B} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0. \tag{35}$$

De fato, se um y ortogonal a todo elemento de $\mathfrak{B}$ for diferente de zero, $\mathfrak{B} \cup \{y/||y||\}$ será um conjunto ortonormal completo contendo $\mathfrak{B}$ propriamente, e portanto $\mathfrak{B}$ não será maximal. Reciprocamente, se $\mathfrak{B}$ não for maximal, então qualquer $y \notin \mathfrak{B}$ que pertença a um conjunto ortonormal completo que contenha propriamente $\mathfrak{B}$ satisfará a afirmação no lado esquerdo de (35), mas não a do lado direito.

Vamos provar que todo espaço vetorial com produto interno possui um subconjunto ortonormal completo usando o *Lema de Zorn*. Para chegarmos ao enunciado desse lema, diversas definições são necessárias.

`Definição` **6.8.** *Seja X um conjunto. Uma* ordem parcial *em X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$ tal que*
(i) $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$,
(ii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$,
(iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$.

Denota-se $(x, y) \in R$ por $x \prec y$. Um abuso de notação muito conveniente é chamar-se o próprio símbolo $\prec$ de ordem parcial. Um conjunto parcialmente ordenado *$(X, \prec)$ é um conjunto munido de uma ordem parcial $\prec$.*

`Exemplo` **6.9.** $(\mathbb{R}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \geq)$ são conjuntos parcialmente ordenados. Se S é um conjunto e $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto dos subconjuntos de S, então $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$ são conjuntos parcialmente ordenados.

Se $(X, \prec)$ é um conjunto parcialmente ordenado, então todo subconjunto Y de X pode ser parcialmente ordenado simplesmente decretando-se que $x \prec y$ em Y se e somente se x e y pertencem a Y e $x \prec y$ em X. Esta é chamada a *ordem parcial induzida* em Y. Mais precisamente, se $R \subseteq X \times X$ é uma ordem parcial em X e $Y \subseteq X$, a ordem parcial induzida em Y por R é $R \cap (Y \times Y)$.

`Definição` **6.10.** *Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado $(X, \prec)$ tal que, se x e y pertencem a X, então ou $x \prec y$ ou $y \prec x$. Um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado é totalmente ordenado se torna-se um conjunto totalmente ordenado quando munido da ordem parcial induzida.*

`Exemplo` **6.11.** $(\mathbb{R}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \geq)$ são totalmente ordenados. Se S tem pelo menos dois elementos, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$ não são totalmente ordenados. $\{[0, a); a > 0\}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ munido de $\subseteq$ ou de $\supseteq$.

`Definição` **6.12.** *Seja $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento $m \in X$ é maximal se $m \prec x$ implica que $x = m$.*

`Definição` **6.13.** *Sejam $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $m \in X$ é uma cota superior de Y em X se $x \prec m$ para todo $x \in Y$.*

Segue imediatamente das definições que, se m é uma cota superior do espaço todo, então m é maximal.

`Exemplo` **6.14.** $(\mathbb{R}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \geq)$ não possuem elementos maximais. S é um elemento maximal em $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. $\emptyset$ é maximal em $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$. $\{0\}$ é uma cota superior de $\{[0, a); a > 0\}$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \supseteq)$ que não pertence a $\{[0, a); a > 0\}$. $\{[0, a); a > 0\}$ não possui cota superior em $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$.

O seguinte teorema decorre de e implica o axioma da escolha [4, Theorem II.2.1].

`Teorema` **6.15.** (`Lema de Zorn`) *Seja $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior em X, então X possui um elemento maximal.*

`Corolário` **6.16.** *Seja $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior em X, então todo subconjunto totalmente ordenado de X possui uma cota superior em X que é um elemento maximal de X.*

Demonstração: Dado $Y \subseteq X$ um subconjunto totalmente ordenado de X, aplique o Teorema 6.15 ao conjunto $Z = \{x \in X; x \text{ é cota superior de } Y\}$ munido da ordem parcial induzida. É fácil ver que um elemento maximal de Z é também um elemento maximal de X que, por definição de Z, é cota superior de Y. $\square$

Teorema 6.17. (**Existência de bases hilbertianas**) *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para todo subconjunto ortonormal $B \subset V$, existe um conjunto ortonormal completo $\tilde{B}$ que contém B.*

Demonstração: Seja X o conjunto de todos os conjuntos ortonormais de V ordenado pela inclusão. Qualquer subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior (a união de todos membros do tal subconjunto). A afirmação que queremos provar decorre então do Corolário 6.16. $\square$

A razão pela qual conjuntos ortonormais completos em espaços de Hilbert são chamados de bases hilbertianas é dada pelo teorema seguinte, que, a propósito, não implica que todo conjunto ortonormal completo seja uma base algébrica no sentido da Álgebra Linear.

Teorema 6.18. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo. Para todo $y \in H$, temos*

$$y = \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y \rangle x_\alpha \quad \text{e} \quad ||y||^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \tag{36}$$

Demonstração: Dado $y \in H$, segue da desigualdade de Bessel (Corolário 1.7) que, para todo $F \subseteq I$ finito,

$$\sum_{\alpha \in F} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \leq ||y||^2. \tag{37}$$

Logo, $F_n = \{\alpha \in I; |\langle x_\alpha, y \rangle| \geq 1/n\}$ é finito para todo n. Logo

$$I' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{\alpha \in I; \langle x_\alpha, y \rangle \neq 0\}$$

é enumerável. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to I'$ uma bijeção. Provemos que

$$\lim_{m \to \infty} y_m = y, \quad \text{para} \quad y_m = \sum_{j=1}^{m} \langle x_{\varphi(j)}, y \rangle x_{\varphi(j)}. \tag{38}$$

A seqüência de números reais

$$t_n = \sum_{j=1}^{m} |\langle x_{\varphi(j)}, y \rangle|^2$$

é não decrescente (óbvio) e limitada (graças a (37)). Logo é de Cauchy. Como os x_α's são mutuamente ortogonais (veja a demonstração do Teorema 1.6) temos

$$||y_n - y_m||^2 = || \sum_{j=m+1}^{n} \langle x_{\varphi(j)}, y \rangle x_{\varphi(j)} ||^2$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x_{\varphi(j)}, y \rangle|^2 = t_n - t_m = |t_n - t_m|,$$

para todo $n > m$. Logo $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.

Como H é completo, existe $\tilde{y} \in H$ tal que $y_m \to \tilde{y}$. Provemos que $\tilde{y} = y$. Para tanto, como $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, basta provar que $\langle x_\alpha, \tilde{y} \rangle = \langle x_\alpha, y \rangle$ para todo $\alpha \in I$ (daí, $\langle x_\alpha, \tilde{y} - y \rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$, logo $y = \tilde{y}$, pela Observação 6.7).

Segue da continuidade do produto interno (veja o Problema 15-a ou aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz), que, para todo $\alpha \in I$, $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \lim_m \langle x_\alpha, y_m\rangle$. Se $\alpha \notin I'$, segue direto das definições que $\langle x_\alpha, y_m\rangle = 0 = \langle x_\alpha, y\rangle$ para todo m, logo $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \langle x_\alpha, y\rangle$.

Se $\alpha \in I'$, seja então $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \varphi(m_0)$. Usando a ortonormalidade de $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$, obtemos que

$$\langle x_\alpha, y - y_m\rangle = \begin{cases} \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle, & \text{se } \ m < m_0 \\ \\ \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle - \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle = 0, & \text{se } \ m \geq m_0 \end{cases}.$$

Logo, $\lim_m \langle x_\alpha, y - y_m\rangle = 0$ e, portanto, $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \lim_m \langle x_\alpha, y_m\rangle = \langle x_\alpha, y\rangle$. Isto prova (38). A primeira das duas igualdades no enunciado do teorema segue então das três proposições do começo desta aula (veja a Observação 6.5).

Como $y_m \to y$, temos $0 = \lim_m ||y - y_m||^2$. Usando o Teorema 1.6, vem então:

$$0 = \lim_{m\to\infty} ||y - \sum_{j=1}^{m} \langle x_{\varphi(j)}, y\rangle x_{\varphi(j)}||^2$$

$$= \lim_{m\to\infty} [\, ||y||^2 - \sum_{j=1}^{m} |\langle x_{\varphi(j)}, y\rangle|^2\,].$$

Segue, de novo do significado da definição de soma infinita dado por aquelas três proposições, que $||y||^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x_\alpha, y\rangle|^2$, como queríamos. □

Problema **41.** Generalize (3) para conjuntos ortonormais infinitos em espaços completos. Ou seja, mostre que, dados $S = \{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert H e $x \in H$, temos:

$$||x||^2 \ = \sum_{\alpha\in I} |\langle x_\alpha, x\rangle|^2 + ||x - \sum_{\alpha\in I} \langle x_\alpha, x\rangle x_\alpha||^2.$$

7. Bases Hilbertianas II (20 de setembro)

De volta ao assunto de somabilidade incondicional em espaços normados, provaremos primeiro que toda família *absolutamente somável* em um espaço de Banach é incondicionalmente somável e que, em um espaço de Hilbert, toda família ortogonal cujas normas ao quadrado formem uma família absolutamente somável é incondicionalmente somável. Depois, usaremos o segundo desses resultados para provar que a primeira das equações em (36) define uma bijeção entre H e as famílias de números complexos $\{c_\alpha; \alpha \in I\}$ tais que a soma $\sum_{\alpha\in I} |c_\alpha|^2$ seja finita.

Definição 7.1. *Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de elementos de um espaço vetorial normado X é* absolutamente somável *se*

$$\sup \{\sum_{\alpha\in F} ||x_\alpha||, F \subseteq I \text{ finito}\} \ < \ \infty \tag{39}$$

Proposição 7.2. *Toda família absolutamente somável em um espaço de Banach é somável (veja a Definição 6.1).*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach, e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família absolutamente somável em X. Denotemos por a o supremo em (39). A hipótese $a < \infty$ implica que, para cada n, $I_n = \{\alpha \in I; ||x_\alpha|| \geq 1/n\}$ é finito. Defina

$$y_n = \sum_{\alpha \in I_n} x_\alpha.$$

Provaremos em seguida que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy e que seu limite é a soma da família dada.

Segue da definição de supremo que, para cada $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito, tal que, para todo $F' \subseteq I$ finito que contenha F_ϵ, temos

$$a - \epsilon < \sum_{\alpha \in F'} ||x_\alpha|| \leq a.$$

É claro que podemos supor que $F_\epsilon \subseteq I'$, onde $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ (jogue fora os elementos de F_ϵ que não pertençam a I', que o que sobrar ainda fará o mesmo serviço). Como I' é a união de todos os I_n's, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subseteq I_{n_0}$. Daí, se $m \geq n \geq n_0$, temos:

$$||y_n - y_m|| = ||\sum_{\alpha \in I_m \setminus I_n} x_\alpha|| \leq \sum_{\alpha \in I_m \setminus I_n} ||x_\alpha||$$

$$= \sum_{\alpha \in I_m} ||x_\alpha|| - \sum_{\alpha \in I_n} ||x_\alpha|| < a - (a - \epsilon) = \epsilon.$$

Isto prova que (y_n) é de Cauchy. Como X é completo, existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$. Provemos que

$$y = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja n_0 o natural escolhido acima. Escolha então $N \geq n_0$ tal que $||y_N - y|| < \epsilon$. Se $F' \subseteq I$ é finito e contém I_N, então temos:

$$||y - \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha|| \leq ||y - y_N|| + ||\sum_{\alpha \in F' \setminus I_N} x_\alpha|| < \epsilon + \sum_{\alpha \in F' \setminus I_N} ||x_\alpha||$$

$$= \epsilon + \sum_{\alpha \in F'} ||x_\alpha|| - \sum_{\alpha \in I_N} ||x_\alpha|| < \epsilon + a - (a - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Isto prova o que queríamos (I_N é o finito F requerido pela Definição 6.1 para o positivo 2ϵ). □

O supremo que aparece em (39) é também igual à soma da família de reais $\{||x_\alpha||; \alpha \in I\}$. É o que peço que provem no próximo problema.

PROBLEMA **42.** Seja $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de reais não negativos.
(a) Mostre que, se

$$\sup\{\sum_{\alpha \in F} t_\alpha, F \subseteq I \text{ finito }\} < \infty,$$

então a família é somável e a soma é igual a esse supremo.
(b) Sejam $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{s_\alpha; \alpha \in I\}$ famílias de reais tais que $0 \leq t_\alpha \leq s_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Mostre que, se $\{s_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável, então $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ também é somável e temos

$$\sum_{\alpha \in I} t_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} s_\alpha.$$

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais. Um resultado muito conhecido, devido a Riemann, afirma que, se

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k$$

existe e é finito e se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \,=\, \infty \tag{40}$$

então [11, Teorema IV.23], para todo $t \in \mathbb{R}$, existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \,=\, t.$$

Pelo Problema 42-a, a condição (40) é equivalente a dizer que a família $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ não é absolutamente somável. Ou seja, a condição necessária para a somabilidade de famílias enumeráveis dada na Proposição 6.2 falha (de maneira surpreendentemente drástica) para séries convergentes reais que não sejam absolutamente convergentes. Isto é, uma família enumerável (logo, pelas Proposições 6.3 e 6.4, qualquer família) de números reais é incondicionalmente somável (isto é, somável no sentido da Definição 6.1) se e somente se é absolutamente somável. É fácil ver, então, que o mesmo vale para famílias em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ com as normas usuais (ou com qualquer norma, mas isso depende da Proposição 9.3). Em espaços de dimensão infinita, entretanto, somabilidade incondicional não é equivalente a somabilidade absoluta – é o que peço que vocês mostrem no Problema 44. Isto explica o aparecimento do conceito, desnecessário em espaços de dimensão finita, de família incondicionalmente somável em espaços vetoriais normados de dimensão infinita.

Problema **43.** Mostre que, se um espaço vetorial normado X é tal que, nele, toda família absolutamente somável é somável, então X é completo.
Sugestões: Mostre que a afirmação do Problema 10 ainda vale se trocarmos $1/n$ por 2^{-n}. Use o Problema 11-b. Use o truque da *série telescópica:*

$$x_n = x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j).$$

Não é por coincidência que a proposição anterior e a próxima têm demonstrações tão parecidas. São ambas casos particulares do Teorema 1.1 de [8, Seção I.1.B], que afirma que uma família em um espaço de Banach é somável se e somente se satisfaz uma certa *condição de Cauchy.*

`Proposição` **7.3.** *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de elementos de H, dois-a-dois ortogonais. Se*

$$\sup\{\sum_{\alpha\in F} ||x_\alpha||^2, F \subseteq I \text{ finito}\} \,<\, \infty, \tag{41}$$

então a família dada é somável.

Demonstração: Denotemos por a o supremo em (41). A hipótese $a < \infty$ implica que, para cada n, $I_n = \{\alpha \in I; ||x_\alpha||^2 \geq 1/n\}$ é finito. Defina

$$y_n \,=\, \sum_{\alpha\in I_n} x_\alpha.$$

Provaremos em seguida que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy e que seu limite é a soma da família dada.

Segue da definição de supremo que, para cada $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito, tal que, para todo $F' \subseteq I$ finito que contenha F_ϵ, temos

$$a - \epsilon < \sum_{\alpha\in F'} ||x_\alpha||^2 \leq a.$$

É claro que podemos supor que $F_\epsilon \subseteq I'$, onde $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ (jogue fora os elementos de F_ϵ que não pertençam a I', que o que sobrar ainda fará o mesmo serviço). Como I' é a união de todos os I_n's, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subseteq I_{n_0}$. Daí, se $m \geq n \geq n_0$, usando que os x_α's são dois-a-dois ortogonais, temos:

$$||y_n - y_m||^2 = ||\sum_{\alpha\in I_m\setminus I_n} x_\alpha||^2 = \sum_{\alpha\in I_m\setminus I_n} ||x_\alpha||^2$$

$$= \sum_{\alpha\in I_m} ||x_\alpha||^2 - \sum_{\alpha\in I_n} ||x_\alpha||^2 < a - (a-\epsilon) = \epsilon.$$

Isto prova que (y_n) é de Cauchy. Como H é completo, existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$. Provemos que

$$y = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha. \tag{42}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja n_0 o natural escolhido acima. Escolha então $N \geq n_0$ tal que $||y_N - y|| < \epsilon$. Se $F' \subseteq I$ é finito e contém I_N, então temos:

$$||y - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha||^2 \leq (||y - y_N|| + ||\sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} x_\alpha||)^2$$

$$\leq 2||y - y_N||^2 + 2||\sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} x_\alpha||^2 = 2||y - y_N||^2 + 2\sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} ||x_\alpha||^2$$

$$< 2\epsilon^2 + 2\sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} ||x_\alpha||^2 = 2\epsilon^2 + 2\sum_{\alpha\in F'} ||x_\alpha||^2 - 2\sum_{\alpha\in I_N} ||x_\alpha||^2$$

$$< 2[\epsilon^2 + a - (a-\epsilon)] = 2(\epsilon^2 + \epsilon).$$

Na segunda das desigualdades acima, usamos que

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \tag{43}$$

para todos a e b reais ((43) é verdadeira, pois equivale a $(a-b)^2 \geq 0$).

Provamos que, para todo $\epsilon > 0$, existe finito $F = I_N \subseteq I$ tal que, se $F' \subseteq I$ é finito e contém F, então

$$||y - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha|| < \sqrt{2(\epsilon^2+\epsilon)}. \tag{44}$$

$\sqrt{2(\epsilon^2+\epsilon)} \to 0$, quando $\epsilon \to 0$. Logo (44) prova (42), como queríamos. □

Problema **44.** Para cada $k \in \mathbb{N}$, denote por $\mathbf{e}^k$ a seqüência $\mathbf{e}^k = (\delta_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_n^k = 0$ se $n \neq k$, $\delta_k^k = 1$.

(a) Mostre que, para todo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$\mathbf{x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\, \mathbf{e}^k.$$

(b) Mostre que

$$\left\{ \frac{1}{k}\,\mathbf{e}^k\,;\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma família somável de ℓ^2 que não é absolutamente somável.

A recíproca abaixo do Teorema 6.18 é agora uma conseqüência fácil da Proposição 7.3.

Teorema 7.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H. Para cada família de números complexos $\{c_\alpha; \alpha \in I\}$ tal que*

$$\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 \ < \ \infty, \tag{45}$$

existe um único $y \in H$ tal que $\langle x_\alpha, y\rangle = c_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Consequentemente,

$$y \ = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha \quad e \quad ||y||^2 \ = \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2. \tag{46}$$

Demonstração: A hipótese (45) e $||x_\alpha|| = 1$ para todo $\alpha \in I$ implicam que a família $\{c_\alpha x_\alpha; \alpha \in I\}$ satisfaz a hipótese da Proposição 7.3. Logo, existe $y \in H$ satisfazendo a primeira das igualdades em (46).

Para cada $\beta \in I$, segue do Problema 40 (aplicado a $T = \langle x_\beta|\,$) que

$$\langle x_\beta, y\rangle = \langle x_\beta, \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha\rangle = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \langle x_\beta, x_\alpha\rangle = c_\beta.$$

Logo, este é o y cuja existência queríamos demonstrar. A unicidade decorre da completude de $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$. A segunda igualdade em (46) decorre da segunda igualdade em (36). □

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n e se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então V é igual ao conjunto de todas as combinações lineares dos v_j's. Se o espaço for munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e a base for ortonormal, então

$$||v||^2 \ = \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, v\rangle|^2. \tag{47}$$

Os Teoremas 6.18 e 7.4 são generalizações destas afirmações para espaços de Hilbert de dimensão infinita. Mas para podermos generalizar (47), tivemos de mudar as definições: no lugar de uma base, pusemos um conjunto ortonormal completo e, no lugar de combinações lineares (que são sempre finitas, por definição), pusemos somas de famílias incondicionalmente somáveis. As novas definições são equivalentes às antigas no caso de espaços de dimensão finita.

A definição de base da Álgebra Linear se aplica também para espaços de dimensão infinita: uma base é um conjunto linearmente independente tal que todo elemento do espaço seja combinação linear de membros desse conjunto. É prudente chamar essas bases de *bases algébricas*, para evitar confusão com as bases hilbertianas. Pode-se demonstrar que todo espaço vetorial tem uma base algébrica usando o Lema de Zorn. Isso é muito parecido com o Teorema 6.17, vale a pena pensar nisso se você nunca viu antes. Entretanto, diferentemente do caso de dimensão finita, se o espaço é munido de produto interno, nem sempre existe uma base (algébrica) ortonormal. Se a base (algébrica) for enumerável, o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt (veja o Exemplo 7.14) garante a existência de uma base (algébrica) ortonormal. Mas um espaço de Hilbert nunca tem uma base algébrica infinita enumerável, veremos isso na próxima aula.

Essa estratégia, de mudar as definições para permitir a generalização dos teoremas da Álgebra Linear para espaços de dimensão infinita, é usada também em teoria espectral. Em dimensão infinita, não só não é verdade que todo operador autoadjunto sempre possua uma base (algébrica) ortonormal de autovetores: nem sequer uma base hilbertiana de autovetores eles possuem, em geral (os autoadjuntos compactos possuem, vamos ver isso mais tarde). Uma outra afirmação, em que se trocam as combinações lineares de projeções da Álgebra Linear por integrais de famílias de projeções, é verdadeira para quaisquer operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert complexos, até mesmo para os densamente definidos não-limitados. No caso de espaços de dimensão finita o novo "teorema espectral" é equivalente à afirmação de que todo operador autoadjunto possui uma base ortonormal de autovetores. Isso não é assunto desta disciplina, entretanto, mas sim da disciplina de Operadores Lineares, que será oferecida no Verão de 2005.

`Definição` **7.5.** *Seja X um espaço vetorial e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de elementos de X. Denotamos por $[x_\alpha; \alpha \in I]$ o subespaço gerado por esta família. Isto é, $x \in [x_\alpha; \alpha \in I]$ se e somente se existem $F \subseteq I$ finito e $\{c_\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \in F\}$ tais que*

$$x = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha x_\alpha.$$

`Teorema` **7.6.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em H. $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em H se e somente se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo.*

Demonstração: Se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, segue do Teorema 6.18 que todo $y \in H$ se escreve como

$$y = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha, \quad \text{onde} \quad c_\alpha = \langle x_\alpha, y \rangle.$$

Segue das Proposições 6.2, 6.3 e 6.4 que

$$\{\alpha \in I; c_\alpha \neq 0\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$$

e

$$y = \lim_{m \to \infty} y_m \quad \text{onde} \quad y_m = \sum_{j=1}^{m} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j}.$$

Isto prova que todo elemento de H é limite de uma seqüência (y_m) em $[x_\alpha; \alpha \in I]$. Prova até mais que isso: a seqüência é tal que o escalar que multiplica cada x_α não depende de m.

Reciprocamente, suponha que $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em H. Se $y \in H$ é tal que $\langle x_\alpha, y \rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$, então y pertence ao complemento ortogonal de $[x_\alpha; \alpha \in I]$, que é nulo, pelo Problema 25-d. Logo, $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, pela Observação 6.7. □

Para um espaço vetorial com produto interno que não seja necessariamente completo, vale o "somente se" do Teorema 7.6, mas pode não valer o o "se". Isto é o que mostram os dois problemas seguintes.

Problema **45.** (a) Sejam X um espaço vetorial normado, D um subespaço denso de X, e D_0 um subespaço de D. Mostre que D_0 é denso em D se e somente se D_0 é denso em X

(b) Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em V tal que $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em V. Mostre que $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo

`Observação` **7.7.** É possível dar um exemplo [1] de um espaço vetorial com produto interno (não-completo) onde existe um conjunto ortonormal completo que não gera um subespaço denso.

PROBLEMA **46.** Seja $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto ortonormal de ℓ^2 introduzido no Problema 44. Dado $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^m = (x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_n^m = x_n$ se $n \leq m$ e $x_n^m = 0$ se $n > m$. Mostre que $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$ em ℓ^2.

`Exemplo` **7.8.** Usando a notação e a afirmação do Problema 46, vemos que $\mathbf{x}^m \in [\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ e, logo, que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em ℓ^2. Se a gente usa que ℓ^2 é completo (foi o que afirmamos sem provar no Exemplo 2.13), segue então do Teorema 7.6 que $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de ℓ^2.

Mas não é preciso sabermos de antemão que ℓ^2 é completo para podermos usar o Teorema 7.6. Mostramos logo em seguida que os Teoremas 6.18, 7.4 e 7.6 na verdade *implicam* que ℓ^2 é completo, se a gente usar que todo espaço vetorial com produto interno possui um completamento. Esta, com certeza, não é a maneira mais fácil de se provar que ℓ^2 é completo, ou que o espaço $\ell^2(S)$ introduzido no Exemplo 7.9 é completo. Um argumento mais simples e direto é dado no Exemplo H.6 de [8, Seção I.5]. Incluo aqui esta discussão com o propósito de realçar o significado dos Teoremas 6.18 e 7.4.

Seja $\tilde{\ell^2}$ o completamento de ℓ^2 (que a princípio poderia ser maior que ℓ^2). Vimos acima que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em ℓ^2. Logo, pelo Problema 45-a, $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é também denso em $\tilde{\ell^2}$. Logo, pelo Teorema 7.6, $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $\tilde{\ell^2}$. Isto prova que existe um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo infinito e enumerável.

Seja então H um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo $\{\mathbf{v}_k; k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, seja

$$T\mathbf{x} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \mathbf{v}_k.$$

Pelo Teorema 7.4, a equação acima define uma aplicação $T : \ell^2 \to H$. A segunda das igualdades em (46) mostra que T preserva a norma (e portanto é injetora). Segue do Teorema 6.18 que T é sobrejetora. Dados $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ e $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, segue do Problema 40-b que

$$T(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} (x_k + \lambda y_k)\mathbf{v}_k$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\mathbf{v}_k \;+\; \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k\mathbf{v}_k \;=\; T\mathbf{x} + \lambda T\mathbf{y}.$$

Logo T é uma bijeção linear que preserva norma. Em particular, ℓ^2 é completo, já que H o é.

`Exemplo` **7.9.** Dado um conjunto S, seja $\ell^2(S)$ o conjunto de todas as funções de S em $\mathbb{C}$, denotadas por $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$, tais que $\{|x_\alpha|^2; \alpha \in S\}$ é somável. Assim, o que antes havíamos chamado de ℓ^2 pode agora ser denotado por $\ell^2(\mathbb{N})$.

Para todo $\alpha \in I$, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos (veja (43)) que $|x_\alpha + \lambda y_\alpha|^2 \leq 2(|x_\alpha|^2 + |\lambda|^2|y_\alpha|^2)$. Segue então do Problema 42-b (aplicado a $t_\alpha = |x_\alpha + \lambda y_\alpha|^2$ e $s_\alpha = 2(|x_\alpha|^2 + |\lambda|^2|y_\alpha|^2)$ e do Problema 40-b que, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ e $(y_\alpha)_{\alpha\in S}$ pertencentes a $\ell^2(S)$, $(x_\alpha + \lambda y_\alpha)_{\alpha\in S}$ também pertence a $\ell^2(S)$. Isto é $\ell^2(S)$, munido das operações óbvias, é um espaço vetorial.

Usando que $|x_\alpha|\,|y_\alpha| \leq (|x_\alpha|^2+|y_\alpha|^2)/2$ (veja (43)), segue do Problema 42-b que, para todos $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ e $(y_\alpha)_{\alpha\in S}$ pertencentes a $\ell^2(S)$, $\{\overline{x_\alpha} y_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família de números complexos absolutamente somável. Daí é fácil verificar, usando diversas de nossas afirmações anteriores sobre somas infinitas, que

$$\langle\, (x_\alpha)_{\alpha\in S}, (y_\alpha)_{\alpha\in S}\,\rangle \;=\; \sum_{\alpha\in S} \overline{x_\alpha} y_\alpha$$

é um produto interno em $\ell^2(S)$.

Para cada $\beta \in S$, seja $\mathbf{e}^\beta \in \ell^2(S)$ dado por

$$\mathbf{e}^\beta = (\delta^\beta_\alpha)_{\alpha\in S}, \quad \delta^\beta_\alpha = 0 \;\text{ se }\; \alpha \neq \beta, \quad \delta^\beta_\beta = 1.$$

É fácil ver que $\{\mathbf{e}^\beta; \beta \in S\}$ é um conjunto ortonormal de $\ell^2(S)$. Defina $\ell^2_c(S) = [\mathbf{e}^\beta; \beta \in S]$, isto é, um elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ de $\ell^2(S)$ pertence a $\ell^2_c(S)$ se e somente se $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ é finito.

Segue do Problema 45-a e do Teorema 7.6 que $\{\mathbf{e}^\beta; \beta \in S\}$ é um conjunto ortonormal completo do completamento de $\ell^2_c(S)$. Isto prova que, dado qualquer conjunto S, existe um espaço de Hilbert H_S que possui um conjunto ortonormal completo indexado por S. Argumentando tal como fizemos para o caso $S = \mathbb{N}$, pode-se usar os Teoremas 6.18 e 7.4 para construir uma bijeção linear isométrica $T : \ell^2(S) \to H_S$. Isto prova que $\ell^2(S)$ é um espaço de Hilbert.

Acabamos de provar, em particular, que, dado qualquer conjunto S, existe um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo com a cardinalidade de S. Na próxima aula veremos que todos os conjuntos ortonormais completos de um dado espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade e que este cardinal classifica todos os espaços de Hilbert a menos de isomorfismos. Nas aplicações a problemas de análise clássica, especialmente os de equações diferenciais parciais, só se usam espaços de Hilbert que possuem conjuntos ortonormais completos enumeráveis, os chamados espaços de Hilbert separáveis. Espaços de Hilbert possuindo conjuntos ortonormais não enumeráveis aparecem em aplicações mais abstratas da Análise Funcional, como por exemplo na teoria de C*-álgebras. Apesar disso, há quem argumente que não se perderia muita coisa se esses espaços de Hilbert grandes demais (os não separáveis) fossem totalmente ignorados.

Problema **47.** Seja S um conjunto e, para cada $\alpha \in S$, seja H_α um espaço de Hilbert. Usando os mesmos símbolos $||\cdot||$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para denotar a norma e o produto interno de cada H_α, defina

$$H = \{(x_\alpha)_{\alpha\in S};\; x_\alpha \in H_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha\in S} ||x_\alpha||^2 < \infty\}.$$

Mostre que

$$\langle (x_\alpha), (y_\alpha)\rangle \;=\; \sum_{\alpha\in S} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle$$

é um produto interno em H e que, munido dele, H é um espaço de Hilbert.

O espaço H construído no Problema 47 é chamado de soma direta da família $\{H_\alpha; \alpha \in S\}$. Isto se denota por

$$H \;=\; \bigoplus_{\alpha \in S} H_\alpha.$$

Esta construção é importante para se demonstrar que toda C*-álgebra é isomorfa [12] a uma subálgebra (fechada e invariante pela involução) de $\mathcal{L}(H)$ para algum espaço de Hilbert H. Esse H é construído como uma soma direta infinita, possivelmente não enumerável, de espaços de Hilbert.

Pode-se também definir soma direta infinita de espaços de Banach. Mas aí, diferentemente do caso da soma direta de espaços de Hilbert, não há uma maneira canônica de se definir uma norma. Uma dessas maneiras é descrita no Problema 48. Outra diferença para o caso de espaços de Hilbert é que não se pode usar "bases" para ajudar na demonstração de que o espaço é completo.

Problema **48.** Seja S um conjunto e, para cada $\alpha \in S$, seja X_α um espaço de Banach. Defina

$$X = \{(x_\alpha)_{\alpha \in S}; x_\alpha \in X_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha \in S} ||x_\alpha|| < \infty\}.$$

Mostre que

$$||(x_\alpha)|| \;=\; \sum_{\alpha \in S} ||x_\alpha||$$

é uma norma em X, e que X munido dela é um espaço de Banach.
Sugestão: Resolva primeiro o caso $S = \mathbb{N}$ e $X_\alpha = \mathbb{C}$ para todo α.

Vamos usar sem demonstrar uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass. Antes de enunciá-lo, talvez convenha introduzir alguns conceitos mais gerais.

`Definição` **7.10.** *Uma* álgebra de Banach *é um espaço de Banach A munido de uma multiplicação que o torna também uma álgebra* (*veja a Definição 5.6*)*. Além disso, a multiplicação da álgebra e a norma estão relacionados pela desigualdade*

$$||ab|| \leq ||a||\,||b||,$$

válida para todos a e b em A.

`Exemplo` **7.11.** O espaço de Banach $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ (veja os Exemplos 1.4, 1.12 e 2.12), munido da multiplicação ponto-a-ponto, é uma álgebra de Banach. Se X é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ é um álgebra de Banach (veja (29) e o Teorema 12.1).

O *Teorema de Stone Weierstrass* dá uma condição suficiente para que subálgebras de $C[a,b]$, ou de outras álgebras de Banach, sejam densas. O Teorema 7.12, que apenas enunciamos, decorre de [14, Theorem IV.10], que trata do caso de $C(X)$, X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Generalizações para certas classes álgebras de Banach (que contêm $C(X)$) se encontram em [2, Chapter 11].

`Teorema` **7.12.** *Seja A uma subálgebra de $C[a,b]$ (isto é, A é um subespaço de $C[a,b]$ tal que, se f e g pertencem a A, então $fg \in A$) tal que:*
(i) A contém as funções constantes.
(ii) Se $f \in A$, então $\bar{f} \in A$.

[12] Este é o Teorema de Gelfand-Naimark-Segal, dado na disciplina Álgebra de Operadores.

(iii) A separa pontos (isto é, dados pontos distintos x e y em $[a, b]$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$).

Então A é densa em $C[a, b]$, munido da norma $||\cdot||_\infty$.

`Exemplo` **7.13.** (`Séries de Fourier`) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina

$$e_k(\theta) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik\theta}.$$

É fácil ver que $\{e_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$.

De $e_k \cdot e_l = e_{k+l}$ e $\overline{e_k} = e_{-k}$ decorre que $A = [e_k;\, k \in \mathbb{Z}]$ é uma subálgebra de $C[-\pi, \pi]$ invariante pelo complexo conjugado. A contém as constantes, pois e_0 é uma função constante diferente de zero. A separa pontos pois $\{e_1\}$ separa pontos. Logo A é densa em $(C[-\pi, +\pi], ||\cdot||_\infty)$, pelo Teorema 7.12.

Dada $f \in C[-\pi, +\pi]$, seja f_n uma seqüência em A que convirja para f com a norma $||\cdot||_\infty$. Como $||f||_2 \leq \sqrt{2\pi}||f||_\infty$ para toda $f \in C[-\pi, +\pi]$, vem que $||f - f_n||_2 \leq \sqrt{2\pi}||f - f_n||_\infty$ para todo n, e daí $f_n \to f$ também com respeito à norma $||\cdot||_2$. Isto é, A é denso também em $(C[-\pi, +\pi], ||\cdot||_2)$.

Mas $C[-\pi, +\pi]$ é denso em $L^2[-\pi, +\pi]$ (veja a página 14). Segue então do Problema 45-a que $A = [e_k;\, k \in \mathbb{Z}]$ é denso em $L^2[-\pi, +\pi]$. Segue então do Teorema 7.6 que $\{e_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[-\pi, +\pi]$.

Daí segue do Teorema 6.18 que, se $f \in C[-\pi, +\pi]$, então sua *série de Fourier* converge para f na norma $||\cdot||_2$, isto é,

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}_j e_j||_2 = 0, \quad \hat{f}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ij\theta} f(\theta) d\theta.$$

Este é um resultado cujo enunciado não depende de conceitos abstratos de análise funcional, mas apenas do cálculo diferencial e integral clássico. Ilustra portanto a força da técnica. A busca de teoremas demonstrando a convergência, em diversos sentidos, das séries de Fourier tiveram uma importância central no desenvolvimento da análise, e de suas aplicações, nos últimos dois séculos.

`Exemplo` **7.14.** Defina $f_n \in C[-1, 1]$, $n = 0, 1, \cdots$, por $f_n(x) = x^n$. Para cada n aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, com respeito ao produto interno usual de $L^2[-1, +1]$, ao conjunto linearmente independente $\{f_0, \cdots, f_n\}$. Chame a seqüência assim obtida de $p_0, p_1, \cdots$ (estes são os *polinômios de Legendre*, úteis na solução de certos problemas de valor de fronteira da física-matemática clássica).

$[f_0, f_1, \cdots]$ é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos. Pelo Teorema 7.12, então, $[f_0, f_1, \cdots]$ é denso em $(C[-1, +1], ||\cdot||_\infty)$ (este caso particular do Teorema 7.12 é conhecido como o Teorema de Weierstrass). O processo de Gram-Schimdt é tal que, para todo n, $[p_0, \cdots, p_n] = [f_0, \cdots, f_n]$. Logo $[p_0, p_1, \cdots] = [f_0, f_1, \cdots]$, que é denso em $(C[-1, +1], ||\cdot||_\infty)$. Argumentando como no Exemplo 7.13, segue que $[p_0, p_1, \cdots]$ é denso em $(C[-1, +1], ||\cdot||_2)$, logo é denso também em $L^2[-1, +1]$. Segue então do Teorema 6.18 que $\{p_0, p_1, \cdots\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[-1, +1]$.

Problema **49.** (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n \in C[0, 1]$ por $g_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$. Mostre que $\{g_m; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[0, 1]$.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina $g_{nk} \in C_c(\mathbb{R})$ por

$$g_{nk} = \begin{cases} \sin(n\pi x), & \text{se } x \in [k, k+1] \\ \\ 0, & \text{se } x \notin [k, k+1] \end{cases} .$$

Mostre que $\{g_{nk};\, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$.

8. Bases Hilbertianas III (23 de setembro)

Definição 8.1. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Um* operador unitário *de H_1 em H_2 é uma bijeção linear $U : H_1 \to H_2$ tal que $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todos x e y em H_1. Dois espaços de Hilbert são* isomorfos *se existe um operador unitário entre eles.*

É fácil ver que um operador unitário é automaticamente contínuo e preserva a norma.

Proposição 8.2. *Uma bijeção linear entre espaços de Hilbert é um operador unitário se e somente se U é contínua e $U^{-1} = U^*$.*

Demonstração: Valendo qualquer uma das duas afirmações que queremos provar que são equivalentes, U é uma bijeção linear contínua inversível. Faz sentido então a seguinte série de afirmações, que ademais são claramente verdadeiras:

$$(\,\forall x, \forall y, \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle\,) \iff (\,\forall x, \forall y, \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle\,)$$
$$\iff (\,\forall x, U^*Ux = x\,) \iff U^*U = I \iff U^{-1} = U^*,$$

como queríamos. □

Observação 8.3. Só supusemos que U era contínua, no enunciado da Proposição anterior, para que fizesse sentido falar em U^*. A 5^a questão da primeira prova mostra que a mera existência de uma aplicação (não necessariamente linear, a princípio) que faça o papel do adjunto de U implica que U é contínua e seu adjunto é linear (isto decorre do teorema do gráfico fechado). Esta afirmação vale também em uma categoria mais geral que os espaços de Hilbert, os chamados *módulos de Hilbert* [17, Lemma 15.2.3].

Exemplo 8.4. Seja $U : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $U(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Embora U^*U seja igual à identidade, U não é um operador unitário, pois não é inversível. *U preserva o produto interno*, isto é, satisfaz $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em ℓ^2. A demonstração da Proposição 8.2 mostra então que $U^*U = I$. Este exemplo mostra que nem sempre a igualdade $U^*U = I$ equivale a U ser unitário. Isso vale se soubermos de antemão que U é inversível, como foi o caso na demonstração da Proposição 8.2.

Segue da identidade de polarização que um operador linear entre espaços de Hilbert U preserva o produto interno se e somente se preserva a norma. Um tal operador é chamado de *isometria*. Atenção: esta definição não é universal. Há quem só chame de isometria as aplicações *sobrejetoras* que preservam a norma, vejam por exemplo [12]. Mais geralmente, temos:

Definição 8.5. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Um operador linear contínuo $U : H_1 \to H_2$ é uma* isometria parcial *se $||Ux|| = ||x||$ para todo x no complemento ortogonal do núcleo de U.*

O objetivo dos quatro problemas seguintes é dar uma caracterização algébrica das isometrias parciais.

Problema **50.** Seja H um espaço de Hilbert e seja T um operador linear contínuo de H em si próprio. Mostre que o complemento ortogonal da imagem de T é igual ao núcleo de T^*.

Problema **51.** Seja X um espaço vetorial normado e seja P um operador linear contínuo de X em si próprio tal que $P^2 = P$.
(a) Mostre que todo y na imagem de P satisfaz $Py = y$.
(b) Mostre que a imagem de P é fechada.
Dica: Calcule P dos dois lados de $\lim_n Px_n = y$

Problema **52.** Seja H um espaço de Hilbert e seja $P : H \to H$ uma transformação linear contínua.
(a) Mostre que, se P é uma projeção ortogonal (este termo foi definido na página 21) sobre algum subespaço fechado de H, então $P = P^2 = P^*$.
(b) Mostre que, se $P = P^2 = P^*$, então P é a projeção ortogonal sobre sua imagem.
Dica: Use os Problemas 50 e 51.

Problema **53.** Seja U uma transformação linear contínua entre espaços de Hilbert. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
(i) U é uma isometria parcial.
(ii) U^*U é uma projeção ortogonal.
(iii) $U = UU^*U$.

Se o espaço de Hilbert for complexo, as três condições acima são também equivalentes a UU^* ser uma projeção ortogonal [13, Theorem 2.3.3]. Isso usa o *cálculo funcional contínuo.*

Proposição 8.6. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $U : H_1 \to H_2$ uma transformação linear contínua. São equivalentes:*
(i) U é um operador unitário.
(ii) H_1 possui um conjunto ortonormal completo $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ tal que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2.
(iii) Para todo conjunto ortonormal completo $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de H_1, $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2.

Além disso, se H_1 e H_2 possuem conjuntos ortonormais completos indexados por um mesmo conjunto de índices, $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$, respectivamente, então existe um único operador contínuo $U : H_1 \to H_2$ tal que $U(x_\alpha) = y_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, e este U é unitário.

Demonstração:
1 ((i)⇒(iii)): Seja $U : H_1 \to H_2$ um operador unitário e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H_1. É fácil ver que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal de H_2. Provemos que é completo. Seja $y \in H_2$ tal que $\langle y, Ux_\alpha\rangle$ para todo $\alpha \in I$. Como U é sobrejetora, existe $x \in H_1$ tal que $y = Ux$. Logo, $\langle Ux, Ux_\alpha\rangle = \langle x, x_\alpha\rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$. Como $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, $x = 0$, logo $y = 0$, como queríamos.
2 ((ii)⇒(i)): Sejam $U : H_1 \to H_2$ uma aplicação linear contínua e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H_1 tal que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto

ortonormal completo de H_2. Pelo Teorema 6.18, todo $x \in H_1$ se escreve como

$$x = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha, \;\; c_\alpha = \langle x_\alpha, x \rangle.$$

Segue da continuidade de U e do Problema 40-a que

$$Ux = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha U x_\alpha.$$

Daí decorre, usando os Teoremas 6.18 e 7.4, que

$$||Ux|| \;=\; \sqrt{\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2} \;=\; ||x||.$$

Isto é, U preserva a norma, logo o produto interno, pela identidade de polarização. U preservar a norma também implica que tem imagem fechada. Por outro lado, a imagem de U contém $[Ux_\alpha; \alpha \in I]$, que é denso. Logo U é uma bijeção que preserva o produto interno, isto é, U é um operador unitário.

3 ((iii)$\Rightarrow$(ii)): Óbvio.

Por fim, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$ são conjuntos ortonormais completos de H_1 e H_2, respectivamente, os Teoremas 6.18 e 7.4 implicam que

$$U(\sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha y_\alpha, \quad \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty,$$

define uma bijeção linear $U : H_1 \to H_2$ que preserva a norma, logo um operador unitário tal que $U(x_\alpha) = y_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. A unicidade de uma tal transformação linear contínua decorre da densidade de $[x_\alpha; \alpha \in I]$ em H_1. □

A hipótese de U ser contínua é indispensável para que (ii) implique (i) na Proposição 8.6, veja o Problema 54.

Definição 8.7. *Um espaço métrico é* separável *se possui subconjunto enumerável denso.*

Proposição 8.8. *Um espaço de Hilbert é separável se e somente se possui um conjunto ortonormal completo enumerável.*

Demonstração: Vamos usar que, se S é um subconjunto enumerável de um espaço vetorial V, e se S contém algum elemento não-nulo, então S possui um subconjunto linearmente independente S' que gera o mesmo subespaço que S, isto é, $[S] = [S']$. Esta é uma afirmação puramente algébrica, que se demonstra facilmente por indução.

Seja H um espaço de Hilbert separável e seja D um subconjunto enumerável denso de H. Extraia de D um subconjunto linearmente independente B tal que $[B] = [D]$. Como $B \subset D$, B é enumerável. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a B (veja o Exemplo 7.14), obtemos um conjunto ortonormal (enumerável) B' tal que $[B'] = [B]$. Como $D \subset [D] = [B] = [B']$ e D é denso em H, vem que B' é um conjunto ortonormal e $[B']$ é denso. Logo, B' é um conjunto ortonormal completo (enumerável), pelo Teorema 7.6.

Seja agora H um espaço de Hilbert que possua um conjunto ortonormal completo enumerável. Se a dimensão de H for finita e, digamos, igual a n, então o conjunto de todas as combinações lineares de de uma base com coeficientes em $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ é denso em H, e este é um conjunto com a cardinalidade de $\mathbb{Q}^{2n}$, logo enumerável. Suponha, por fim, que H possua um sistema ortonormal completo infinito e enumerável, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots\}$. Então

$$[\mathcal{B}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [v_1, \cdots, v_n]$$

é denso em H, pelo Teorema 7.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $[v_1, \cdots, v_n]$ possui um subconjunto enumerável denso D_n: o conjunto das combinações lineares de $\{v_1, \cdots, v_n\}$ com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. A união de todos os D_n's é, portanto, um subconjunto enumerável denso de H (pois é denso em $[\mathcal{B}]$, que é denso em H). □

A Proposição anterior, no caso em que o espaço tem dimensão infinita, é um caso particular do seguinte teorema, que implica que a *dimensão hilbertiana* está bem definida (veja a Definição 8.11).

Teorema 8.9. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. H possui um conjunto ortonormal completo indexado por um conjunto S se e somente se*
(i) H possui um subconjunto denso com a mesma cardinalidade de S e
(ii) Nenhum subconjunto de H com cardinalidade menor que a de S é denso.

Demonstração: Suponha que H possui um conjunto ortonormal completo infinito indexado por S, $\mathcal{B} = \{x_\alpha; \alpha \in S\}$. Podemos escrever o espaço gerado por $\mathcal{B}$ como

$$[x_\alpha; \alpha \in S] \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n,$$

onde

$$D_n \;=\; \{\sum_{j=1}^{n} c_{\varphi(j)} x_{\varphi(j)};\; \varphi : \{1, \cdots, n\} \to S\,, c_{\varphi(j)} \in \mathbb{C}\}.$$

Pelo Teorema 7.6, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ é denso em H. Para cada $n \in N$, o conjunto

$$D'_n \;=\; \{\sum_{j=1}^{n} c_{\varphi(j)} x_{\varphi(j)};\; \varphi : \{1, \cdots, n\} \to S\,, c_{\varphi(j)} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}.$$

é denso em D_n, logo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n$ é denso em H. Para cada $n \in \mathbb{N}$, D'_n tem a cardinalidade de $\mathbb{Q}^{2n} \times S^n$. O produto cartesiano de dois conjuntos infinitos tem cardinalidade igual à do conjunto de maior cardinalidade [4, Corollary 8.6]. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, a cardinalidade de D'_n é igual à de S. A união de uma família enumerável de conjuntos infinitos de mesma cardinalidade também tem essa cardinalidade. Isto decorre de [4, Corollary 8.6], junto com [4, 8.3(a)]. Logo, a união de todos os D'_n's é um subconjunto denso de H que tem a cardinalidade de S, o que prova (i).

Seja agora D um subconjunto denso arbitrário de H e seja $\{x_\alpha; \alpha \in S\}$ um conjunto ortonormal completo. Segue da densidade de D que, para cada $\alpha \in S$, existe um $y_\alpha \in D$ tal que $||y_\alpha - x_\alpha|| < 1/2$. Dados distintos α e β em S, temos

$$\begin{aligned} ||y_\alpha - y_\beta|| &= ||(x_\alpha - x_\beta) + (y_\alpha - x_\alpha) + (x_\beta - y_\beta)|| \\ &\geq ||x_\alpha - x_\beta|| - ||(y_\alpha - x_\alpha) + (x_\beta - y_\beta)|| \\ &\geq ||x_\alpha - x_\beta|| - (||y_\alpha - x_\alpha|| + ||x_\beta - y_\beta||) > \sqrt{2} - 1 > 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que a aplicação $S \ni \alpha \mapsto y_\alpha \in D$ é injetora. Isto é, a cardinalidade [13] de S é menor ou igual à de D, o que prova (ii).

Reciprocamente, seja S um conjunto tal que vale (i) e (ii) e seja $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo. Podemos aplicar o "somente se" do enunciado do teorema para o conjunto ortonormal completo dado. Logo, valem (i) e (ii) também se substituirmos I no lugar de S.

Por (i)-I, temos que H possui um subconjunto denso com a cardinalidade de I. Por (ii)-S, vem então que a cardinalidade de S é menor ou igual que a de I. Por outro lado, segue de (i)-S que H possui um subconjunto denso com a cardinalidade de S. Segue então de (ii)-I que a cardinalidade de I é menor ou igual à de S. Como a classe dos números cardinais é totalmente ordenada, concluímos então que S e I têm a mesma cardinalidade. $\square$

Corolário 8.10. *Todas os conjuntos ortonormais completos de um espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração: Sejam $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\beta; \beta \in S\}$ conjuntos ortonormais completos de H. Valem então as afirmações (i) e (ii) do enunciado do Teorema 8.9, para S e com I no lugar de S. O mesmo argumento usado no último parágrafo da demonstração do Teorema 8.9 mostra que S e I têm a mesma cardinalidade. $\square$

Definição 8.11. *A dimensão de um espaço de Hilbert* (*também chamada* dimensão hilbertiana*, se quisermos explicitar a diferença com a dimensão algébrica*) *é a cardinalidade de suas bases hilbertianas.*

Podemos agora obter o seguinte corolário da Proposição 8.6.

Corolário 8.12. *Dois espaços de Hilbert são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão.*

Demonstração: Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert com a mesma dimensão. Então eles possuem conjuntos ortonormais completos com o mesmo conjunto de índices, logo existe um operador unitário $U : H_1 \to H_2$ que aplica um conjunto ortonormal completo no outro. Reciprocamente, se $U : H_1 \to H_2$ é um operador unitário entre os espaços de Hilbert H_1 e H_2, e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_1, então $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2 com cardinalidade igual à dimensão de H_1. $\square$

Vemos assim que a dimensão hilbertiana *classifica* os espaços de Hilbert, isto é, dois espaços de Hilbert são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão. Isto não significa que só *haja um* espaço de Hilbert separável, por exemplo, mas apenas que tudo que se diga sobre um espaço de Hilbert separável usando apenas sua estrutura de espaço de Hilbert (ou seja, suas operações algébricas, sua norma, seu produto interno, suas seqüências convergentes, seus subconjuntos abertos, etc) vale também para qualquer outro espaço de Hilbert separável. Mas para as aplicações, faz muita diferença se o espaço de Hilbert que se está usando é mesmo o ℓ^2, ou se é algum espaço de Sobolev numa variedade.

---

[13]Aqui, como também já no enunciado do Teorema 8.9, estamos implicitamente usando que a classe de todos os números cardinais é totalmente ordenada, com ordem ordem assim definida: a cardinalidade de um conjunto X é menor ou igual que a de um conjunto Y se e somente se existe uma aplicação injetora de X em Y. Isto é o que se afirma em [4, Theorem 7.8(1)], e decorre do *Teorema de Bernstein-Schröder* [4, Corollary 7.7].

Não há um teorema que classifique os espaços de Banach a menos de isomorfismo. Por isso a geometria dos espaços de Banach é uma área tão vasta da Análise Funcional, enquanto que ninguém fala da geometria dos espaços de Hilbert como uma área de pesquisa. Afinal, talvez seja justo afirmar que, "geometria de espaços de Hilbert" resume-se a dois fatos: a existência de projeções ortogonais e a existência de bases (cuja cardinalidade classifica o espaço).

Devo aqui alertar que o que se costuma definir como *isomorfismo* de espaços de Banach é apenas uma bijeção linear contínua com inversa contínua, que não necessariamente preserva a norma (o Corolário 10.5 de certa forma justifica essa convenção). Isso causa uma pequena confusão de nomenclatura: pode acontecer de dois espaços de Hilbert serem isomorfos como espaços de Banach, mas não como espaços de Hilbert. Por exemplo, se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ (veja o Problema 2), os completamentos de $C_0^1(\bar{\Omega})$ com respeito aos produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle^1$ são isomorfos como espaços de Banach (por causa da desigualdade de Poincaré), mas não como espaços de Hilbert. Outro exemplo importante é o espaço L^2 de uma variedade compacta X, isto é, $L^2(X)$ para alguma escolha de medida em X que seja localmente dada por uma função não-nula de classe C^∞ multiplicada pela medida de Lebesgue. Diferentes medidas, levam a espaços de Hilbert não-isomorfos, mas que são isomorfos como espaços de Banach.

9. O Teorema de Baire (27 de setembro)

`Teorema` **9.1.** `(Baire)` *Um espaço métrico completo não pode ser escrito como união enumerável de fechados com interior vazio.*

`Definição` **9.2.** *Equivalência de normas.*

`Proposição` **9.3.** *Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.*

`Proposição` **9.4.** *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.*

`Proposição` **9.5.** *Todo subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio.*

`Proposição` **9.6.** *Se a dimensão (algébrica) de um espaço de Banach for infinita, ela é não-enumerável. Isto é, ou uma base (algébrica) do espaço é finita ou é não-enumerável.*

Problema **54.** (a) Mostre que todo conjunto ortonormal completo de um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita está estritamente contido em uma base algébrica.
(b) Mostre que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita possui um subespaço denso de codimensão finita e não-nula (veja a Definição 12.5).
(c) Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita. Mostre que, dados conjuntos ortonormais completos $\{x_1, x_2, \cdots\}$ e $\{y_1, y_2, \cdots\}$ de H_1 e de H_2, respectivamente, existe uma aplicação linear descontínua $U : H_1 \to H_2$ tal que $U(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
(d) Decida se valem as afirmações dos dois primeiros itens se não se supuser que o espaço é separável.

10. Limitação Uniforme e Aplicação Aberta (30 de setembro)

Teorema 10.1. (Banach-Steinhaus) *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo, e seja $\mathcal{F}$ uma família de aplicações lineares contínuas de X em Y. Se*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| \ < \ \infty, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||T|| \leq C$ para todo $T \in \mathcal{F}$.

Problema **55.** Sejam X um espaço de Banach e D um subespaço denso de X. Sejam T_n, $n \in \mathbb{N}$, transformações lineares contínuas de X em um espaço vetorial normado Y tais que $T_n x \to 0$ para todo $x \in D$. Mostre que $T_n x \to 0$ para todo $x \in X$ se e somente se existe $C \geq 0$ tal que $||T_n|| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema **56.** Sejam X um espaço de Banach, seja Y um espaço vetorial normado, sejam $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, transformações lineares contínuas. Mostre que, se existe

$$\lim_n T_n x, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

então existe um único $T : X \to Y$ linear e contínuo tal que

$$Tx \ = \ \lim_n T_n x, \quad \textit{para todo} \quad x \in X,$$

Definição 10.2. *Abertos e fechados em espaços métricos.*

Proposição 10.3. *Se $f : M \to N$ é uma aplicação contínua entre espaços métricos, então, para todo A aberto em N, $f^{-1}(A)$ é aberto em M.*

Teorema 10.4. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Se T é sobrejetora, então, para todo A aberto em X, $T(A)$ é aberto em Y.*

Corolário 10.5. *Se $T : X \to Y$ é uma bijeção contínua entre espaços de Banach, então T^{-1} é contínua.*

Problema **57.** Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e sejam M e N subespaços fechados de X tais que $M \cap N = \{0\}$ e $X = M + N$. Mostre que $||(m,n)||_1 = ||m|| + ||n||$ e $||(m,n)||_0 = ||m + n||$ são normas equivalentes em $M \times N$.

Problema **58.** Seja X um espaço de Banach e sejam M e N subespaços fechados de X tais que $X = M \oplus N$. Mostre que existem projeções (no sentido da Definição 4.6) sobre M e sobre N.

11. Teorema do Gráfico Fechado (4 de outubro)

Proposição 11.1. *Se M e N são espaços métricos,*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \ = \ d(x_1, x_2) \ + \ d(y_1, y_2)$$

é uma métrica no produto cartesiano $M \times N$ tal que, para toda função contínua $f : M \to N$, o gráfico *de f*

$$\mathtt{gr}\, f \ = \ \{(x, f(x); \, x \in M\}$$

é um subconjunto fechado de $M \times N$.

No caso em que os espaços métricos são espaços vetoriais normados, a métrica definida na Proposição 11.1 é induzida pela norma

$$||(x,y)||_1 \ = \ ||x|| \ + \ ||y||. \tag{48}$$

PROBLEMA **59.** Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert.
(a) Mostre que

$$||(x,y)||_2 \;=\; \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$$

é uma norma em $H_1 \times H_2$, equivalente à norma $||\cdot||_1$ definida em (48).
(b) Mostre que a norma $||\cdot||_2$ provém de um produto interno, munido do qual $H_1 \times H_2$ torna-se também um espaço de Hilbert.
(c) Mostre que $J(x,y) = (-y,x)$ define um operador unitário de $H_1 \times H_2$ em $H_2 \times H_1$.
(d) Seja $T : H_1 \to H_2$ uma aplicação linear contínua. Mostre que

$$J[(\mathtt{gr}\,T)^{\perp}] \;=\; [J(\mathtt{gr}\,T)]^{\perp} \;=\; \mathtt{gr}\,T^*,$$

onde $\perp$ denota o complemento ortogonal tanto em $H_1 \times H_2$ quanto em $H_2 \times H_1$.

`Teorema` **11.2.** `(Teorema do Gráfico Fechado)` *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Se o gráfico de T é um subespaço fechado de $X \times Y$ (com respeito à norma $||\cdot||_1$), então T é contínua.*

`Corolário` **11.3.** *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : D \to Y$ um operador densamente definido, $D \subseteq X$. Se T for uma bijeção e se o gráfico de T for um subespaço fechado de $X \times Y$, então T^{-1} é contínuo.*

`Teorema` **11.4.** `(Hellinger-Toeplitz)` *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ uma aplicação linear. Se $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todos x e y em H, então A é contínua*

`Proposição` **11.5.** *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados, sendo os dois primeiros completos, e seja $B : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear. B é separadamente contínua se e somente se B é contínua.*

`Definição` **11.6.** *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : D \to Y$ um operador densamente definido, $D \subseteq X$. T é* fechado *se o gráfico de T é fechado em $X \times Y$. T é* fechável *se o fecho do gráfico de T em $X \times Y$ é o gráfico de um operador densamente definido. Quando existe esse operador cujo gráfico é o fecho do gráfico de T, ele é chamado então de* fecho de T *e é denotado por $\bar{T}$.*

`Definição` **11.7.** *Seja $T : D \to Y$, $D \subseteq Y$ um operador fechado entre os espaços de Banach X e Y (D pode ser igual a X e, neste caso, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pelo Teorema 11.2). O espectro de T é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(T - \lambda I) : D \to Y$ não é uma bijeção. O espectro de um operador fechável é o espectro de seu fecho.*

Segue do Corolário 11.3 que, se λ não pertence ao espectro do operador fechado T, então $(T - \lambda I)^{-1}$ é contínuo.

`Proposição` **11.8.** *Um operador densamente definido $T : D \to Y$ é fechável se e somente se, para toda seqüência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em D,*

$$(x_k \to 0 \;\text{ e }\; Tx_k \to y) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0.$$

`Exemplo` **11.9.** Sejam $a_1, \cdots, a_n$ funções complexas de classe C^∞ definidas em $\mathbb{R}^n$, seja $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, e seja $D = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então o operador $L : D \to H$ dado por

$$Lu(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

é fechável. Quase o mesmo argumento prova que qualquer operador diferencial parcial com coeficientes de classe C^∞ em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, visto como um operador densamente definido em $L^2(\Omega)$, é fechável. O espectro de um operador diferencial é então, por definição, o espectro desse fecho. O mesmo vale para variedades.

12. Quocientes (7 de outubro)

Teorema 12.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Se Y é completo, então $\mathcal{L}(X,Y)$ é completo.*

Proposição 12.2. *Seja X um espaço vetorial normado, e seja Y um subespaço fechado de X. Denotando por $[x]$ a classe de $x \in X$ no quociente X/Y,*

$$||[x]|| \;=\; \inf_{y \in Y} ||x - y|| \tag{49}$$

é uma norma em X/Y.

Proposição 12.3. *Seja X um espaço vetorial normado, e seja Y um subespaço fechado de X. Se X é completo, então o quociente X/Y, munido da norma definida em (49), também é completo.*

Problema **60.** Mostre que o quociente de $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ pelo subespaço $C_0(a,b)$ de todas as funções de $C[a,b]$ que se anulam em a e em b é isomorfo a $\mathbb{C}^2$.

Proposição 12.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Denotando por $\pi : X \to X/\ker T$ a projeção canônica, existe uma única aplicação linear contínua $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$ tal que $\tilde{T} \circ \pi = T$.*

Problema **61.** Seja H um espaço de Hilbert e seja M um subespaço fechado de H. Seja $P : H \to H$ a projeção ortogonal sobre $M^\perp$ (como definimos pouco antes do Problema 31) e seja $\tilde{P}$ o operador associado a P da maneira descrita no enunciado da Proposição 12.4.
(a) Mostre que $\tilde{P}$ preserva a norma e que a imagem de $\tilde{P}$ é igual a $M^\perp$.
(b) Mostre que H/M é um espaço de Hilbert.

Definição 12.5. *Seja X um espaço vetorial e seja Y um subespaço de X. A codimensão (ou codimensão algébrica) de Y em X é a dimensão algébrica do quociente X/Y.*

Teorema 12.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Se a imagem de T tem codimensão finita, então ela é fechada.*

13. Hahn-Banach I (21 de outubro)

Teorema 13.1. *Seja X um espaço vetorial real e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todo $\alpha \in [0,1]$, tem-se*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \;\leq\; \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y).$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe uma aplicação linear $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a Y é igual a λ e que satisfaz $\Lambda(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 13.2. (Hahn-Banach) *Seja X um espaço vetorial complexo e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todos complexos α e β tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$, tem-se*

$$p(\alpha x + \beta y) \ \leq \ |\alpha| p(x) + |\beta| p(y).$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ tal que $|\lambda(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe uma aplicação linear $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a Y é igual a λ e que satisfaz $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Corolário 13.3. *Sejam X um espaço vetorial normado, $Y \subseteq X$ um subespaço e $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ uma aplicação linear contínua. Existe uma aplicação linear contínua $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ cuja restrição a Y é igual a λ e tal que $||\Lambda||_{X^*} = ||\lambda||_{Y^*}$.*

Demonstração: Aplique o Teorema 13.2 a $p(x) = ||\lambda|| \, ||x||$. □

Problema **62.** Seja X um espaço vetorial complexo e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todos complexos α e β tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$, tem-se

$$p(\alpha x + \beta y) \ \leq \ |\alpha| p(x) + |\beta| p(y).$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ tal que $|\lambda(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Sem usar o Teorema 13.2, mostre [14] que p necessariamente satisfaz $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

14. Hahn-Banach II (25 de outubro)

Corolário 14.1. *Sejam X um espaço vetorial normado e y um elemento não-nulo de X. Existe $\Lambda \in X^*$ tal que $||\Lambda|| = 1$ e $\Lambda(y) = ||y||$.*

Corolário 14.2. *Sejam X um espaço vetorial normado e $Z \subset X$ um subespaço. Se existe $y \in X$ tal que*

$$\inf_{z \in Z} ||y - z|| \ = \ d \ > 0,$$

então existe $\Lambda \in X^*$ que é nulo em Z e tal que $||\Lambda|| = 1$ e $\Lambda(y) = d$.

Problema **63.** *Mostre que os funcionais lineares Λ, cuja existência é garantida pelos Corolários 13.3, 14.1, e 14.2, são únicos, no caso em que X é um espaço de Hilbert.*

Proposição 14.3. *Seja X um espaço vetorial normado. Para cada $x \in X$, a aplicação $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$ é uma aplicação linear contínua de norma igual a $||x||$.*

A Proposição precedente define uma aplicação linear que preserva norma

$$\hat{} : X \to X^{**}, \tag{50}$$

onde X^{**} denota o bidual de X, isto é, o dual de X^*. Se X é um espaço vetorial normado qualquer, então o fecho de $\{\hat{x};\, x \in X\}$ em X^{**} é um completamento de X. Ou seja, usando-se o Teorema de Hahn-Banach, pode-se demonstrar o Teorema 2.15 sem se fazer aquela construção explícita com classes de equivalência de seqüências de Cauchy.

No caso em que X é completo, a aplicação $\hat{}$ preservar norma implica que $\hat{}$ tem imagem fechada. Isto é, X pode ser canonicamente identificado com um subespaço fechado de X^{**}.

[14]Este problema foi proposto e resolvido pelos alunos durante a aula

Definição 14.4. *Um espaço de Banach é reflexivo se a aplicação* ˆ *definida em* (50) *for sobrejetora.*

Exemplo 14.5. Todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo.

Exemplo 14.6. Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Definição 14.7. *Seja X um espaço de Banach. Uma função $f : \mathbb{C} \to X$ é* inteira *se, para todo $z \in C$, existe o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

f é limitada *se* $\sup_z ||f(z)||$ *é finito.*

No caso em que $X = \mathbb{C}$, o teorema seguinte é o *Teorema de Liouville*, da análise complexa. O caso geral decorre do caso $X = \mathbb{C}$ e do Corolário 14.1.

Teorema 14.8. *Seja X um espaço de Banach. Se $f : \mathbb{C} \to X$ é inteira e limitada, então f é constante.*

Se X é um espaço vetorial normado,

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \langle \lambda, x \rangle = \lambda(x) \end{array}$$

é uma aplicação bilinear. Pelo Corolário 14.1, esta é uma aplicação bilinear não-degenerada, no seguinte [15] sentido: se $\langle \lambda, x \rangle = 0$ para todo x, então $\lambda = 0$; e se $\langle \lambda, x \rangle = 0$ para todo λ, então $x = 0$.

Definição 14.9. *Seja X um espaço de Banach. Dado M um subespaço de X, $M^\perp = \{\lambda \in X^*;$ para todo $x \in M,\ \langle \lambda, x \rangle = 0\}$. Dado N um subespaço de X^*, ${}^\perp N = \{x \in X;$ para todo $\lambda \in N,\ \langle \lambda, x \rangle = 0\}$*

Problema 64. Seja M um subespaço de um espaço de Banach X, seja N um subespaço do dual X^*. Mostre que:
(a) $M^\perp$ é um subespaço fechado de X^*.
(b) ${}^\perp N$ é um subespaço fechado de X.
(c) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.
(d) ${}^\perp(\overline{N}) = {}^\perp N$.
(e) ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.
(f) M é denso em X se e somente se $M^\perp = \{0\}$.
(g) Se X for reflexivo, então N é denso em X^* se e somente se ${}^\perp N = \{0\}$.
Sugestão: No (e) e no (f), use o Corolário 14.2.

Proposição 14.10. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, existe um único $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tal que $\langle T'\lambda, x \rangle = \langle \lambda, Tx \rangle$ para todo $\lambda \in Y^*$ e para todo $x \in X$. Além disso, $||T'|| = ||T||$.*

Problema 65. Seja $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ a transformação linear induzida da maneira usual por A, uma matriz complexa $m \times n$. Mostre que a matriz de $(T_A)'$, com respeito às bases canônicas duais, é igual à matriz transposta de A.

Definição 14.11. *O operador T' definido na Proposição 14.10 é o* transposto *de T.*

[15] Alguns exigem mais que isto para chamar uma aplicação bilinear de não-degenerada.

O Problema 64 (compare-o com o Problema 25), o Problema 63 e a Proposição 14.10 (compare-a com o Teorema 5.5) justificam a seguinte afirmação (imprecisa): o Teorema de Hahn-Banach é, para espaços de Banach, em diversas situações, um substituto para a existência de projeções ortogonais em espaços de Hilbert.

15. Hanh-Banach III (28 de outubro)

Definição 15.1. *Um espaço métrico é* separável *se possui um subconjunto enumerável denso.*

Proposição 15.2. *Seja X um espaço de Banach. Se X^* é separável, então X é separável.*

Proposição 15.3. *Seja X um espaço de Banach. X é reflexivo se e somente se X^* é reflexivo.*

Problema **66.** (a) Mostre que $\mathsf{c} = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$ e $\mathsf{c}_\circ = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ são subespaços fechados de ℓ^∞.
(b) Mostre que existe $\mathbf{x} \in \mathsf{c}$ tal que $\mathsf{c} = \mathsf{c}_\circ \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}$.
(c) Mostre que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em $\mathsf{c}_\circ$, com $\mathbf{e}^k$ denotando as sequências definidas no Problema 44.

Problema **67.** (a) Mostre que existe pelo menos um funcional linear contínuo $\lambda \in (\ell^\infty)^*$ tal que, para todo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}$, $\lambda(\mathbf{x}) = \lim x_n$.
(b) Mostre que existe mais de um funcional como pedido no item (a).

Problema **68.** Sejam X um espaço de Banach e $M \subset X$ um subespaço fechado e próprio (isto é, $M \neq X$).
(a) Mostre que existe $\lambda \in X^*$ que se anula em M e tal que $||\lambda|| = 1$.
(b) Mostre que, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$, tal que $||x|| = 1$ e $||x - y|| \geq 1 - \epsilon$ para todo $y \in M$.
Dica: Obtenha $x \in X$ tal que $||x|| = 1$ e $|\lambda(x)| \geq 1 - \epsilon$ para o λ do item (a).

Problema **69.** Seja X um espaço de Banach e seja $M \subseteq X$ um subespaço de dimensão finita.
(a) Mostre que, se $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base de M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in X^*$ tais que $\lambda_j(x_j) = 1$ para todo j, e $\lambda_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$.
(b) Mostre que existe uma projeção sobre M, no sentido da Definição 4.6.

16. Duais (4 de novembro)

Proposição 16.1. *Seja X um espaço de Banach e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família absolutamente somável em X. Então*

$$||\sum_{\alpha\in I} x_\alpha|| \leq \sum_{\alpha\in I} ||x_\alpha||$$

($\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável em X pela Proposição 7.2, e $\{||x_\alpha||; \alpha \in I\}$ é somável em $\mathbb{R}$ pelo Problema 42).

Proposição 16.2. *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, a aplicação*

$$\mathsf{c}_\circ \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^1 \ni \lambda \longmapsto T_1(\lambda) = \Lambda \in (\mathsf{c}_\circ)^*.$$

`Teorema` **16.3.** *A aplicação linear $T_1 : \ell^1 \to (\mathsf{c}_\circ)^*$, definida na Proposição 16.2, é uma bijeção isométrica.*

Problema **70.** Seja X um espaço de Banach, sejam M e N subespaços fechados de X tais que $X = M \oplus N$.
(a) Dados funcionais lineares contínuos $\lambda_1 : M \to \mathbb{C}$ e $\lambda_2 : N \to \mathbb{C}$, mostre que

$$\lambda(m+n) = \lambda_1(m) + \lambda_2(n),\ m \in M,\ n \in N,$$

é um funcional linear contínuo $\lambda : X \to \mathbb{C}$. Denote isto por $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$.
Sugestão: Use o Problema 57.
(b) Mostre que todo $\lambda \in X^*$ é da forma $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$, para algum $\lambda_1 \in M^*$ e algum $\lambda_2 \in N^*$.

Problema **71.** (a) Usando o Problema 66-b e o Problema 70, mostre que existe uma bijeção linear contínua $T^c : \ell^1 \to \mathsf{c}^*$.
(b) Dê uma fórmula explícita para a transformação linear $T : \ell^1 \to \ell^1$ definida assim: $T(\lambda) = (T_1)^{-1}(\rho)$, onde ρ é a restrição a $\mathsf{c}_\circ$ de $T^c(\lambda)$.
Dica: É possível definir T^c de modo que

$$T(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots) \ = \ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots).$$

Se preciso, use esta informação como uma dica também para construir T^c.
(c) Decida se o T^c que você construiu é uma isometria.

`Proposição` **16.4.** *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, a aplicação*

$$\ell^1 \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^\infty \ni \lambda \longmapsto T_\infty(\lambda) = \Lambda \in (\ell^1)^*.$$

`Teorema` **16.5.** *A aplicação linear $T_\infty : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, definida na Proposição 16.4, é uma bijeção isométrica.*

`Corolário` **16.6.** $\mathsf{c}_\circ$ *não é reflexivo.*

Demonstração: Use os Teoremas 16.3 e 16.5, juntamente com as três observações seguintes: (i) $(\mathsf{c}_\circ)^{**} \ni \eta \mapsto \eta \circ T_1 \in (\ell^1)^*$ é uma bijeção linear isométrica (isto decorre de T_1 ser uma bijeção linear isométrica), (ii) para todo $\mathbf{x} \in \mathsf{c}_\circ$, $\hat{\mathbf{x}} \circ T_1 = T_\infty(\mathbf{x})$ e (iii) $\mathsf{c}_\circ \neq \ell^\infty$. □

Problema **72.** Mostre que c não é reflexivo.

Os argumentos da demonstração dada em sala para a Proposição 16.2 mostram também o seguinte:

`Proposição` **16.7.** *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, a aplicação*

$$\ell^\infty \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^1 \ni \lambda \longmapsto S_1(\lambda) = \Lambda \in (\ell^\infty)^*.$$

Tal como no Teorema 16.3, demonstra-se que a aplicação S_1 definida na Proposição 16.7 preserva norma, isto é, satisfaz $||S_1(\lambda)||_{(\ell^\infty)^*} = ||\lambda||_{\ell^1}$ para todo $\lambda \in \ell^1$. Vejamos em seguida porque S_1 não é sobrejetora.

Tal como na demonstração do Corolário 16.6, vê-se que, a menos da identificação de $(\ell^1)^*$ com ℓ^∞ dada pelo Teorema 16.5, a aplicação S_1 é a mesma coisa que a aplicação $\hat{}: \ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ (definida em (50) para um espaço vetorial normado qualquer). Assim, S_1 não ser sobrejetora é equivalente a ℓ^1 não ser reflexivo.

Podemos concluir que ℓ^1 não é reflexivo de duas maneiras, usando argumentos abstratos. Primeiro, porque se ℓ^1 fosse reflexivo, $(\mathsf{c}_\circ)^*$ também seria (pelo Teorema 16.3). Logo, $\mathsf{c}_\circ$ seria reflexivo (pela Proposição 15.3); o que é falso, pelo Corolário 16.6. Segundo porque, se ℓ^1 fosse reflexivo, então S_1 seria sobrejetora, e daí o dual de ℓ^∞ seria isomorfo a ℓ^1, logo separável pelo Problema 74-a. Logo, pela Proposição 15.2, ℓ^∞ seria separável; o que é falso, pelo Problema 74-b.

Uma maneira "concreta" de se provar que ℓ^1 não é reflexivo é mostrando diretamente que S_1 não é sobrejetora. Isto é o que peço que vocês provem no Problema 73

Cabe aqui o seguinte comentário. Um espaço de Banach X ser reflexivo significa, por definição, que a aplicação definida em (50) é sobrejetora (no caso $X = \ell^1$, isso seria a mesma coisa que S_1 ser sobrejetora). A Proposição 14.3 implica que, se X é reflexivo, então X é isometricamente isomorfo a X^{**}. Entretanto, X ser isometricamente isomorfo a seu bidual não implica que X é reflexivo. Em 1951 foi dado um contraexemplo [9].

Problema **73.** Dê exemplo de um funcional linear contínuo $\lambda : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ que não pertença à imagem de S_1.

Problema **74.** (a) Mostre que ℓ^1 é separável. (b) Mostre que ℓ^∞ não é separável.

`Exemplo` **16.8.** Seja p real, $p > 1$, e seja q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, a aplicação

$$\ell^p \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^q \ni \lambda \longmapsto T_q(\lambda) = \Lambda \in (\ell^p)^*.$$

Demonstra-se que T_q é uma bijeção isométrica entre ℓ^q e $(\ell^p)^*$. Trocando os papéis de p e q, vemos que ℓ^p é isometricamente isomorfo a $(\ell^p)^{**}$. O isomorfismo assim obtido é a aplicação $\hat{}$ para ℓ^p. Logo, ℓ^p é reflexivo.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, o dual de $L^p(\Omega)$, p e q como no parágrafo anterior, é isometricamente isomorfo a $L^q(\Omega)$, e portanto $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

17. Operadores Compactos I (8 de novembro)

18. Operadores Compactos II (11 de novembro)

Problema **75.** (a) Dados $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\sup_n |\alpha_n|$ é finito, mostre que existe um único $S \in \mathcal{L}(\ell^2)$ tal que $S\mathbf{e}^n = \alpha_n \mathbf{e}^{n+1}$.
(b) Mostre que $||S|| = \sup_n |\alpha_n|$.
(c) Mostre que, se $\lim \alpha_n = 0$, então S é compacto. Sugestão: Truncando a seqüência e usando o item (b), mostre que S é limite de operadores de posto finito.

(d) Mostre que S só é compacto se $\lim \alpha_n = 0$. Sugestão: Negue que o limite é nulo e obtenha então uma seqüência na bola unitária cuja imagem não tem subseqüência convergente.

Problema **76.** Dados $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, tais que

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} |a_{jk}|^2$$

é finito, mostre que

$$A(\,(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,) \;=\; (\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k\,)_{j\in\mathbb{N}}$$

define um operador compacto em ℓ^2.
Sugestão: Para provar que A é limitado e estimar sua norma, tente imitar o que fizemos em sala para o operador integral com núcleo em $C([0,1]\times[0,1])$ agindo em $L^2[0,1]$. Feito isso, provar que A é limite de operadores de posto finito é mais fácil aqui, no caso discreto.

Problema **77.** (a) Dados $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, tais que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \quad \text{e} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \tag{51}$$

são finitos, mostre que

$$A(\,(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,) \;=\; (\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k\,)_{j\in\mathbb{N}}$$

define um operador limitado $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ satisfazendo $||A|| \leq \sqrt{C_1 C_2}$, onde C_1 e C_2 denotam, nesta ordem, os dois supremos que aparecem em (51).
Dica: Para cada j, aplique Cauchy-Schwarz às seqüências

$$(\,\sqrt{|a_{jk}|}\,)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (\,\sqrt{|a_{jk}|}\cdot|x_k|\,)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Depois, eleve ao quadrado, use a hipótese, some em j, use de novo a hipótese, e tome a raiz quadrada (se não nesta, talvez noutra ordem).
(b) Mostre que o adjunto de A também é dado por uma matriz infinita satisfazendo a mesma hipótese.
(c) Mostre que, se

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{j\geq m} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \;=\; 0,$$

então A é compacto. Dica: Esta hipótese implica que A pode ser aproximado por operadores de posto finito, dados por finitas linhas da matriz.
(d) Mostre que, se

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \;=\; 0,$$

então A é compacto. Sugestão: Use os itens (b) e (c) e que A^* é compacto se A o for.

Problema **78.** Dado $K \in C([0,1]\times[0,1])$, mostre que

$$Tu(x) \;=\; \int_0^1 K(x,y)u(y)dy$$

define um operador compacto em $(C[0,1], ||\cdot||_\infty)$.
Sugestão: Use o Teorema de Arzelá-Ascoli [11, Teorema X-22].

Problema **79.** Decida se o operador de Volterra (definido no Problema 30) é compacto.

Problema **80.** Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que, se $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$, então

$$||T|| \; = \; \{\, |\langle Tx, x\rangle| \,;\; ||x|| = 1\,\}.$$

Dica: Polarização e paralelogramo, veja [14, Problema VI-9a].

19. Teorema Espectral para operadores compactos (18 de novembro)

20. Topologias fracas em espaços de Banach (22 de novembro)

21. Teorema de Banach-Alaoglu (25 de novembro)

22. Primeira Prova (18 de outubro)

Cada questão vale 2,5 pontos. Podem tentar todas. Escolherei quatro delas de modo a maximizar a nota.

1ª Questão. Calcule a norma dos seguintes operadores.

(a) $V : (C[0,2], ||\cdot||_\infty) \to (C[0,2], ||\cdot||_\infty)$ definido por $Vf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,2]$.

(b) $T : (C[0,2], ||\cdot||_2) \to (C[0,2], ||\cdot||_2)$ definido por $Tf(x) = xf(x)$, $x \in [0,2]$.

2ª Questão. (a) Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam u e v pertencentes a H. Calcule a norma e ache o adjunto do operador $T : H \to H$ definido por $T(x) = \langle u, x\rangle v$

(b) Mostre que o operador identidade de $(C_c(\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ em $(C_c(\mathbb{R}), ||\cdot||_2)$ não é contínuo, nem tem inversa contínua.

3ª Questão. Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo. Para cada $a > 0$, denote por B_a a bola aberta em X ou em Y de centro na origem e raio a. Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua.

(a) Mostre que, se ϵ e δ são reais positivos tais que $B_\delta \subset \overline{T(B_\epsilon)}$, então $B_{t\delta} \subset \overline{T(B_{t\epsilon})}$ para todo $t > 0$.

(b) Assuma que T satisfaz: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset \overline{T(B_\epsilon)}$. Mostre que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset T(B_\epsilon)$. `Sugestão`: Dado $y \in B_\delta$, construa sequência $x_k \in X$ tal que $(y - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Tx_j)$ tenda a zero e $||x_k|| < \epsilon/2^{k-1}$.

4ª Questão. (a) Seja $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, uma sequência convergente em ℓ^2, o espaço das sequências complexas de quadrado somável. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C}$.

(b) Seja $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2; \, (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ e seja $T : D \to \ell^2$ definido por $T(x_n) = (nx_n)$. Mostre que o gráfico de T é fechado em $\ell^2 \times \ell^2$ e que T não é contínuo.

5ª Questão. Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : H \to H$ uma aplicação linear. Suponha que existe uma aplicação $S : H \to H$ tal que $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todos x e y em H. Mostre então que S é linear e que S e T são contínuas. `Sugestão`: Dada sequência x_k tal que x_k e Tx_k convergem, calcule $\lim_k \langle z, Tx_k\rangle$ para cada $z \in H$.

23. Segunda Prova (6 de dezembro)

1ª Questão. (2,5 pontos) Seja X um espaço de Banach e seja $M \subseteq X$ um subespaço de dimensão finita.
(a) Mostre que, se $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base de M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in X^*$ tais que $\lambda_j(x_j) = 1$ para todo j, e $\lambda_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$.
(b) Mostre que $T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j(x)$ define um operador contínuo em X, $T^2 = T$, e a imagem de T é igual a M.
2ª Questão. (2,5 pontos) Seja $\mathsf{c} = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\, x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$.
(a) Mostre que existe pelo menos um funcional linear contínuo $\lambda \in (\ell^\infty)^*$ tal que, para todo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}$, $\lambda(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} x_n$.
(b) Mostre que existe mais de um funcional como pedido no item (a).
3ª Questão. (3 pontos) (a) Mostre que existe um conjunto ortonormal $\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ em $L^2(\mathbb{R})$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: (i) $f_n \in C_c(\mathbb{R})$, (ii) $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e (iii) $f_n(x) = 0$ se $x \notin [2^{-n}, 2^{1-n}]$.
(b) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada satisfazendo $a(x) \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que $Af(x) = a(x)f(x)$ define um operador linear contínuo não-compacto em $L^2(\mathbb{R})$.
(c) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada e não-nula. Mostre que $Af(x) = a(x)f(x)$ define um operador linear contínuo não-compacto em $L^2(\mathbb{R})$.
Observação: No item (c), basta esboçar os argumentos que forem muito parecidos com os usados antes.
4ª Questão. (2 pontos) Seja H um espaço de Hilbert e seja T um operador compacto auto-adjunto em H.
(a) Mostre que, se $T - \lambda I$ é inversível para todo $\mathbb{C} \ni \lambda \neq 0$, então $T = 0$.
(b) Mostre que, se H não for separável, então o núcleo de T tem dimensão hilbertiana não enumerável.
Sugestão: Use o teorema espectral.

24. Prova Substitutiva (16 de dezembro)

Podem tentar resolver todas as questões. Escolherei as quatro que maximizem a nota.
1ª Questão. (2,5 pontos) Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ linear e contínua. Mostre que:
(a) Se existe $C > 0$ tal que $||Tx|| \geq C||x||$ para todo $x \in X$, então a imagem de T é fechada em Y.
(b) Se T é injetora e se sua imagem é fechada em Y, então existe $C > 0$ tal que $||Tx|| \geq C||x||$ para todo $x \in X$.
Sugestão: No item (b), use o Teorema da Aplicação Aberta.
2ª Questão. (2,5 pontos) Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um dado elemento de ℓ^1.
(a) Mostre que $\Lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ define um funcional linear contínuo em $\mathsf{c}_\circ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ munido da norma $||\cdot||_\infty$.
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n \in \mathbb{C}$ tal que $|a_n| = 1$ e $|\lambda_n| = \lambda_n a_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{x}^k$ a seqüência $\mathbf{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n^k = a_n$ se $n \leq k$, e $x_n^k = 0$ se $n > k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, calcule o valor absoluto de $\Lambda(\mathbf{x}^k)$.

(c) Calcule a norma em $\mathsf{c}_\circ^*$ do funcional Λ definido no item (a).

3ª Questão. (2,5 pontos) (a) Seja H um espaço de Hilbert e sejam x e y elementos de H tais que $y \neq 0$, $||x|| = 1$ e $\langle x, y\rangle = ||y||$. Mostre que $x = y/||y||$.

Sugestão: Escreva y como a soma de dois vetores, um paralelo e outro perpendicular a x.

(b) Seja H um espaço de Hilbert e seja M um subespaço fechado de H. Mostre que, para cada $y \notin M$, existe um único $\Lambda \in H^*$ tal que: (i) Λ se anula em M, (ii) $||\Lambda|| = 1$ e (iii) $\Lambda(y) = \inf\limits_{z\in M} ||y - z||$.

4ª Questão. (2,5 pontos) Seja X o espaço vetorial de todas as funções complexas contínuas e limitadas definidas em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo.

(a) Mostre que existe pelo menos um funcional linear contínuo $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ de norma igual a 1 satisfazendo: se $f \in X$ é tal que existem e são iguais os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, então $\Lambda(f) = L$.

(b) Mostre que existem pelo menos dois funcionais lineares como no item (a).

Dica: Use sem provar que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, desde que existam os limites.

5ª Questão. (2,5 pontos) (a) Sejam X e Y espaços de Banach e sejam $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, aplicações lineares e contínuas. Supondo que, para cada $x \in X$, existe em Y o limite $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, mostre que existe uma aplicação linear contínua $T : X \to Y$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$.

Sugestão: Use o Princípio da Limitação Uniforme.

(b) Seja H um espaço de Hilbert e sejam $T_n : H \to H$, $n \in \mathbb{N}$, aplicações lineares contínuas. Supondo que, para cada $x \in H$ e para cada $y \in H$, existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n x, y\rangle$, mostre que existe uma aplicação linear $T : H \to H$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n x, t\rangle = \langle Tx, y$, para todo $x \in H$ e todo $y \in H$.

Sugestão: Para cada $x \in H$, aplique o item (a), junto com o Lema de Riesz, a $\langle T_n x, \cdot\rangle : H \to \mathbb{C}$.

Referências

[1] N. Bourbaki, Topological Vector Spaces, Springer, 1987.
[2] J. Dixmier, C*-Algebras, North Holland, 1982.
[3] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, 1972.
[4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
[5] G. B. Folland, Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, John Wiley & Sons, 1984.
[6] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations, Springer, 1983.
[7] A. Gonçalves, Introdução à Álgebra, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
[8] C. S. Hönig, Análise Funcional e Aplicações, IME-USP, 1970.
[9] R. C. James, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 174-177, 1951.
[10] F. John, Partial Differential Equations, Springer, 1982.
[11] E. Lima, Curso de Análise I, IMPA, 1976.
[12] E.L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Livros Técnicos e Científicos, 1976.
[13] G. J. Murphy, C*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.
[14] M. Reed & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis), Academic Press, 1980.
[15] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1978.
[16] F. Treves, Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975.
[17] N. E. Wegge-Olsen, K-theory and C*-algebras, Oxford University Press, 1994.