Exercício 15.5.14 da Quarta Edição do Stewart: Uma lâmina ocupa a região circular $x^2+y^2=2y$ mas fora do círculo $x^2+y^2=1$. Determine o centro de massa se a densidade for proporcional à distância à origem.

Solução: Denotando por ρ a densidade e por D a região ocupada pela lâmina, as coordenadas do centro de massa são:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dA}{\iint_D \rho(x,y)\,dA} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dA}{\iint_D \rho(x,y)\,dA}.$$

Por hipótese, $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ para alguma constante k. Cancelando k no numerador e no denominador das fórmulas para $\bar{x}$ e $\bar{y}$, vem:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dA}{\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dA}{\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA}.$$

Para encontrar desigualdades que descrevam a região D, observemos primeiramente que a interseção dos dois círculos são os pontos $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. A região D pode então ser descrita em coordenadas polares pelas desigualdades $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$, $1 \le r \le 2\operatorname{sen}\theta$. Daí:

$$\bar{x} = \frac{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} r^3\cos\theta\,dr\,d\theta}{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\,dr\,d\theta} = \frac{\frac{16}{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\,d\theta}{\frac{8}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta} = 0$$

e

$$\bar{y} = \frac{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} r^3\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta}{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\,dr\,d\theta} = \frac{\frac{16}{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\operatorname{sen}^5\theta\,d\theta}{\frac{8}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta} = \frac{3\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(1-\cos^2\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{2\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta} =$$

$$\frac{3\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)^2\,dt}{2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)\,dt} = \frac{3\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)^2\,dt}{2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)\,dt} = \frac{3(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{80})}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8})} = \frac{87}{60}.$$

Confiram as contas!