MAT 0315 - Introdução à Análise Real - Turma 48

Prova Substitutiva - 2 de dezembro de 2013

Nome : ____________________

Número USP : ____________________

Assinatura : ____________________

1	
2	
3	
4	
Total	

Cada questão em branco vale 0,25.

Questão 1: Defina a noção, usada pelos gregos antigos, de incomensurabilidade de dois segmentos e relacione essa noção com o moderno conceito de número irracional.

Questão 2: Dados A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, definimos $A \cdot B$ como o conjunto de todos os possíveis produtos de um elemento de A por um elemento de B, isto é, $A \cdot B = \{ab;\ a \in A, b \in B\}$.

Supondo que A e B são limitados e que seus elementos são todos maiores do que $1/3$, mostre que

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Questão 3: (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{999^n}{3^{n^2}}$ converge.

(b) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente.

Questão 4: (a) Mostre que a sequência $x_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$, $n \in \mathbb{N}$, é decrescente. Sugestão: calcule x_{n+1}/x_n.

(b) Mostre que $\lim x_n = 0$. Sugestão: use a segunda das desigualdades dadas no "Fato" abaixo.

(c) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$ converge. Sugestão: use o (a) e o (b).

(d) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ diverge. Sugestão: use a primeira desigualdade do "Fato".

`FATO`: Existem constantes positivas M e N tais que $M\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{n^n}{e^n n!} < N\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.