

MAT 0315 - Introdução à Análise Real - Turma 47

Prova Substitutiva - 2 de dezembro de 2013

Nome : _____

Número USP : _____

Assinatura : _____

1	
2	
3	
4	
Total	

Cada questão em branco vale 0,25.

Questão 1: Defina a noção, usada pelos gregos antigos, de incomensurabilidade de dois segmentos e relacione essa noção com o moderno conceito de número irracional.

Questão 2: Dados A e B dois subconjuntos de \mathbb{R} , definimos $A \cdot B$ como o conjunto de todos os possíveis produtos de um elemento de A por um elemento de B , isto é, $A \cdot B = \{ab; a \in A, b \in B\}$.

Supondo que A e B são limitados e que seus elementos são todos maiores do que $1/2$, mostre que

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Questão 3: (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{2^{n^2}}$ converge.

(b) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente.

Questão 4: (a) Mostre que a sequência $x_n = \frac{n^n}{e^n n!}$, $n \in \mathbb{N}$, é decrescente. Sugestão: calcule x_{n+1}/x_n .

(b) Mostre que $\lim x_n = 0$. Sugestão: use a segunda das desigualdades dadas no “Fato” abaixo.

(c) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$ converge. Sugestão: use o (a) e o (b).

(d) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ diverge. Sugestão: use a primeira desigualdade do “Fato”.

FATO: Existem constantes positivas M e N tais que $M \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n^n}{e^n n!} < N \frac{1}{\sqrt{n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.