MAT 0334 - Análise Matemática II

Prova substitutiva - 5 de julho de 2011

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________

Número USP : ____________________

Assinatura : ____________________

Escolha quatro das cinco questões propostas. Todas têm o mesmo valor.

Questão 1: Seja M um subespaço não-denso de um espaço de Hilbert H e seja $\lambda : M \to \mathbb{C}$ linear e contínuo. Mostre λ possui infinitas extensões lineares e contínuas $\Lambda : H \to \mathbb{C}$, mas que só uma delas satisfaz $||\Lambda|| = ||\lambda||$.

Questão 2: Para cada k inteiro, defina $f_k(x) = \text{sen}((2k+1)x)$. Mostre que $\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} f_k;\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$, e que $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} f_k;\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ é um conjunto ortonormal de $L^2([0, \pi])$ que não é completo.

Questão 3: Considere c_0, o espaço das sequências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, munido da norma do supremo. Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, mostre que se pode definir um funcional linear contínuo em c_0 por

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \quad \text{e que} \quad ||T|| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Questão 4: Seja $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f \text{ é contínua e limitada}\}$. Munido da norma $||f|| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, X é completo (não é preciso demonstrar esta afirmação). Mostre que existe $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ linear e contínuo tal que

$$\Lambda(f) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

sempre que os dois limites existirem e que, além disso, $\Lambda(g) = 1$, onde g denota a função $g(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Questão 5: Seja $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definido por $(Vf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que V é compacto e não tem nenhum autovalor. É V autoadjunto? Você pode usar sem demonstrar que V é injetor.