Exercício 9f da Lista 1

Vamos usar coordenadas polares com centro no ponto $(1,0)$, em vez de $(0,0)$. Ou seja, faremos a mudança de variáveis

$$x-1=r\cos\theta \quad \text{e} \quad y=r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

O elemento de área para essas variáveis é igual ao das coordenadas polares usuais: $r\,dr\,d\theta$.

Por essa mudança, $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=r$. Podemos obter a equação da circunferência que delimita superiormente o domínio D, nessas coordenadas, substituindo $x=1+r\cos\theta$ e $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$ na equação $x^2+y^2=1$. Isso dá:

$$(1+r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2=1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2r\cos\theta+r^2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad r=-2\cos\theta.$$

A região D nessas coordenadas pode ser descrita pelas desigualdades $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$, $0\leq r\leq -2\cos\theta$ (note que, para θ entre $\pi/2$ e π, o cosseno de θ é negativo).

Daí, vem:

$$\iint_D \sqrt{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{-2\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta=-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\,\mathrm{sen}^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta=-\frac{8}{3}\int_1^0(1-u^2)\,du=\frac{8}{3}\int_0^1(1-u^2)\,du=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}.$$

Exercício 24 da Lista 1

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\frac{x}{a}=u, \quad \frac{y}{b}=v \quad \text{e} \quad \frac{z}{c}=w.$$

O elemento de volume "$dx\,dy\,dz$" vira "$abc\,du\,dv\,dw$".

A região cujo volume queremos calcular, $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2\leq 1$, se transforma em $u^2+v^2+w^2\leq 1$. Chamando de V o volume, vem:

$$V=\iiint_{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2\leq 1} 1\,dx\,dy\,dz=\int\int\int_{u^2+v^2+w^2\leq 1} abc\,du\,dv\,dw.$$

Essa última integral pode ser calculada usando coordenadas esféricas, mas sabemos que o resultado é abc vezes o volume da esfera de raio 1. Logo, $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

Exercício 25 da Lista 1

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\frac{x}{2} = u, \quad \frac{y}{3} = v \quad \text{e} \quad z = w.$$

O elemento de volume "$dx\,dy\,dz$" vira "$6\,du\,dv\,dw$".

O domínio de integração E se transforma na região F descrita pelas desigualdades $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, $u \geq 0$. Vamos usar umas coordenadas esféricas um pouco diferentes das usuais: já que vamos integrar u, as contas ficam mais simples se usarmos o eixo u para definir o ângulo ϕ (façam um desenho, para entender melhor):

$$u = \rho\cos\phi, \quad v = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \quad w = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Nessas coordenadas, a região F fica descrita pelas desigualdades $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Daí, vem:

$$\iiint_E x\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_F 2u\,du\,dv\,dw = 12\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (\rho\cos\phi)\cdot(\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$24\pi\int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\,d\phi = 6\pi\,\frac{\mathrm{sen}^2\phi}{2}\Bigg|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = 3\pi.$$