MAT 0334 - Análise Matemática II

3^a Prova - 28 de junho de 2011

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Questão 1 (2,5 pts) Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dada uma sequência limitada de complexos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defina $M : \ell^p \to \ell^p$ por $M((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que M é limitado e que seu espectro é igual ao fecho de $\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Questão 2 (2,5 pts) Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $T : H \to H$ linear, limitado e autoadjunto. Mostre que

$$||T|| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|;\ ||x|| = 1\}.$$

Questão 3: (3 pts) Dada $f \in C^1([0,\pi])$, defina $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Mostre que, para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, a série $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\cos(nx)$ converge, e assim se define uma função contínua em $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ tal que $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in [0,\pi]$. Mostre, além disto, que a restrição de u a $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ é de classe C^∞ e satisfaz $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, e $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ para todo $t > 0$.

Questão 4 (3 pts) Seja $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definido por $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \left(\dfrac{x_{n+1}}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Mostre que T é compacto e que não tem nenhum autovalor. É T autoadjunto?