USP – MAT 2458 – Álgebra Linear II – Turma 20

3^a Prova - 26 de novembro de 2014

Questão 1 (2,5 pts) Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base do esapço vetorial V. Seja $T : V \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear para a qual $T(\mathbf{v}_1) = (0, 0, -1)$, $T(\mathbf{v}_2) = (1, -1, 0)$ e $T(\mathbf{v}_3) = (1, 1, 0)$.

(a) Calcule $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$. `Resposta`: $(1, 7, -2)$.

(b) Ache a matriz de T relativa a B e à base canônica de R^3. `Resposta`: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 2 (2,5 pts) Seja W o plano de equação $2x - y - z = 0$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que multiplica por 2 todos os vetores de W e tal que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Ache a matriz canônica de T. `Sugestão`: Ache primeiro a matriz de T relativa a uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de W e o vetor $(1, 0, 0)$ e depois use mudança de base.

`Resposta`: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Questão 3 Seja $T : M_{22} \to M_{22}$ a transformação linear definida por $T(X) = AX + XB$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache a dimensão do núcleo de T e a dimensão da imagem T.

`Sugestão`: Ache primeiro a matriz de T relativa a alguma base de M_{22}.

`Resposta`: A dimensão do núcleo é 1 e a dimensão da imagem é 3.

Questão 4 (2,5 pts) Seja V o subespaço do espaço vetorial das funções funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tem como base $B = \{\operatorname{sen} x, \cos x, x\operatorname{sen} x, x\cos x\}$. Seja $T : V \to V$ a transformação linear definida por $Tf = f' - f$.

(a) Ache a matriz de T na base B.

(b) Mostre que T é inversível.

`Resposta`: (a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) Basta mostrar que a matriz obtida no item (a) é inversível. Isso pode ser feito, por exemplo, achando a inversa, ou mostrando que o determinante da matriz é diferente de zero. A maneira menos trabalhosa, neste caso, é verificar (fazendo apenas duas operações elementares sobre as linhas) que ela é linha-equivalente a $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, que é claramente inversível, pois é triangular-superior com todos os elementos da diagonal não-nulos.