MAT 0450 - Seminário de Resolução de Problemas

2ª Prova - 18 de junho de 2013

Questão 1: (T47) (a) Liste em ordem crescente todos os inteiros positivos menores do que mil que são múltiplos de nove e cujos dígitos (de sua expansão na base 10) são todos pares.

(b) Se um inteiro positivo menor do que mil for sorteado aleatoriamente, qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 9 e todos os seus dígitos serem pares?

Questão 1: (T42) (a) Liste em ordem crescente todos os inteiros maiores que 2.000 e menores do que 3.000 que são múltiplos de nove e cujos dígitos (de sua expansão na base 10) são todos pares.

(b) Se um inteiro positivo maior do que 2.000 e menor do que 3.000 for sorteado aleatoriamente, qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 9 e todos os seus dígitos serem pares?

Questão 2: (T47) Dado n , um inteiro maior do que 4, mostre que ele é composto se, e somente se, $(n - 1)!$ é divisível por n .

Questão 2: (T42) Dado n , um inteiro maior do que 4, mostre que ele tem mais de um fator primo se, e somente se, $\text{mmc}(2, 3, \dots, n - 1)$ é divisível por n .

Questão 3: (T47) Dois jogadores se enfrentam em uma batalha de War, o Jogo da Estratégia. O atacante lança dois dados e o defensor, um. O atacante conquistará o território do defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, seu maior dado for maior do que o dado do defensor. Qual é a probabilidade de o atacante conquistar o território em apenas um lance de dados?

Questão 3: (T42) Dois jogadores se enfrentam em uma batalha de War, o Jogo da Estratégia. O atacante lança três dados e o defensor, um. O atacante conquistará o território do defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, seu maior dado for maior do que o dado do defensor. Qual é a probabilidade de o atacante conquistar o território em apenas um lance de dados?

Questão 4: (T47) Seja γ a aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se $\gamma(t) = (x, y)$, então $x \neq 1$ e $t = y/(1 - x)$.

(b) Mostre que γ é injetora e que sua imagem é igual a $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (1, 0)\}$.

(c) Encontre todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$.

Questão 4: (T42) Seja γ a aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se $\gamma(t) = (x, y)$, então $y \neq 1$ e $t = x/(1 - y)$.

(b) Mostre que γ é injetora e que sua imagem é igual a $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (0, 1)\}$.

(c) Encontre todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$.