

Questão 1: Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2)$, calcule: (a) o cosseno do ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e (b) o vetor que se obtém refletindo $\vec{v}$ em relação à reta que passa pela origem e é paralela a $\vec{u}$.

Solução: (a) Se θ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\langle (3, 1), (1, -2) \rangle}{\sqrt{3^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + 2^2}} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

(b) A projeção de $\vec{v}$ em $\vec{u}$ é dada por

$$\vec{p} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} = \frac{\langle (3, 1), (1, -2) \rangle}{\langle (3, 1), (3, 1) \rangle} (3, 1) = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{3 \cdot 3 + 1 \cdot 1} (3, 1) = \frac{1}{10} (3, 1) = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right).$$

A reflexão de $\vec{v}$ em relação à reta que passa pela origem e é paralela a $\vec{u}$ é

$$\vec{r} = \vec{p} + (\vec{p} - \vec{v}) = 2 \cdot \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) - (1, -2) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right).$$

Questão 2: Ache as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + y = 0$ que são paralelas à reta $y = x$.

Solução: Uma reta paralela a $y = x$ é uma reta da forma $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$. Queremos portanto determinar os valores de b para os quais o sistema $\begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 + y = 0 \end{cases}$ tenha uma única solução. Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos $x^2 + (x + b)^2 + (x + b) = 0$; isto é, $2x^2 + (2b + 1)x + (b^2 + b) = 0$. Queremos que esta equação tenha uma única solução, logo queremos que seu discriminante seja nulo:

$$\Delta = (2b + 1)^2 - 4 \cdot 2(b^2 + b) = -4b^2 - 4b + 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos $b = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, as duas retas procuradas são

$$y = x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 3: Ache os focos da elipse $x^2 + 2y^2 - x + y = 0$. Solução: Completando quadrados, obtemos:

$$x^2 + 2y^2 - x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{16}} = 1.$$

Daí, o centro da elipse é $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Os semi-eixos a e b satisfazem $a^2 = \frac{3}{8}$ e $b^2 = \frac{3}{16}$. A metade da distância dos focos c satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$. Logo $c^2 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Os focos são portanto $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

Questão 4: Dado $a > 0$, ache os focos da hipérbole $xy = a$. Solução: Façamos a mudança de variáveis $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$. O par (x', y') são as coordenadas do ponto (x, y) com respeito ao sistema cartesiano $OX'Y'$ que se obtém girando o sistema OXY de 45° no sentido anti-horário. A equação da curva $xy = a$ nas novas variáveis é

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) = a.$$

Simplificando, obtemos: $\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = a$, ou $\frac{(x')^2}{2a} - \frac{(y')^2}{2a} = 1$, que é a equação de uma hipérbole com focos no eixo OX' e metade da distância focal satisfazendo $c^2 = 2a + 2a$, logo $c = 2\sqrt{a}$. As coordenadas dos focos no sistema $OX'Y'$ são $x' = \pm 2\sqrt{a}$ e $y' = 0$. Nas coordenadas originais são $x = \frac{\pm 2\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{0}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{\pm 2\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \frac{0}{\sqrt{2}}$. Isto é, os focos são $F_1 = (-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a})$ e $F_2 = (\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$.