MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III - Turma 20 - 2^a Prova - 13 de maio de 2014

Questão 1: Seja C a interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $z=y$. Calcule $\displaystyle\int_C \sqrt{2x^2+z^2}\,ds$.

`Solução`: Uma possível parametrização de C é

$$(x(t),y(t),z(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Daí, $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}$ e, portanto,

$$\int_C \sqrt{2x^2+z^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1+\cos^2 t)\,dt = 2\pi + \frac{1}{2}2\pi = 3\pi.$$

Questão 2: Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}+y, \dfrac{x}{x^2+y^2}+x\right)$, e seja C a fronteira do retângulo $\{(x,y);\ |x|\le 1, |y| \le 1\}$, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

`Solução`: Chamando de P a primeira coordenada de $\mathbf{F}$ e de Q a segunda, temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + 1 + \frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} - 1 = 0.$$

Seja D o conjunto dos pontos interiores ao retângulo dado e exteriores ao círculo de raio 1 e centro na origem. Aplicando o Teorema de Green à região D e ao campo $\mathbf{F}$, vem:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

onde $\tilde{C}$ é a circunferência de raio 1 e de centro na origem percorrida no sentido anti-horário. Nos pontos (x,y) pertencentes a $\tilde{C}$, $x^2+y^2=1$ e, portanto, $\mathbf{F}(x,y) = (0,2x)$. Assim:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\int_{\tilde{C}} x\,dy.$$

Para calcular essa última integral, parametrizamos $\tilde{C}$ por $(x(t),y(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, donde vem:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,dt = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = 2\pi.$$

Questão 3: Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

(a) Encontre uma função escalar ϕ cujo gradiente seja igual a $\mathbf{F}$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva parametrizada por $(\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{t}{\pi})$, $0 \le t \le 2\pi$.

`Solução`: (a) Definindo $\phi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Logo, $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

(b) Como $\mathbf{F} = \nabla\phi$, então $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(Q) - \phi(P)$, onde P é o ponto inicial de C e Q é o ponto final de C. Assim:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,0,2) - \phi(1,0,0) = \sqrt{5} - 1.$$

Questão 4: (a) Seja D a região limitada por um caminho simples fechado C no plano xy, orientada no sentido anti-horário. Use o Teorema de Green para mostrar que as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centroide de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\int_C y^2\,dx,$$

onde A é a área de D.

(b) Use o item (a) para encontrar o centroide de uma região semicircular de raio a.

`Solução`: (a) Definindo o campo $\mathbf{F}$ por $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, onde $P(x,y) = 0$ e $Q(x,y) = x^2$, temos

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C x^2\,dy. \tag{1}$$

Aplicando o Teorema de Green e usando a definição de centroide, vem:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D 2x\,dx\,dy = 2A\bar{x}. \tag{2}$$

Comparando as equações (1) e (2), obtemos a primeira das igualdades que queremos demonstrar.

Analogamente, definindo o campo $\mathbf{G}$ por $\mathbf{G}(x,y) = (y^2, 0)$, temos

$$\int_C y^2\,dx = \int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_D 2y\,dx\,dy = -2A\bar{y},$$

como queríamos demonstrar.

(b) Escolhendo um sistema de eixos de modo que a região semi-circular, que chamaremos de D, seja descrita pelas inequações $x^2+y^2 \leq a^2$ e $y \geq 0$, a fronteira de D consistirá da união de duas curvas, o diâmetro C_1 e a semi-circunferência C_2; que podem ser parametrizadas, com a orientação correta, respectivamente, por $(t,0)$, $-a \leq t \leq a$, e por $(a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Daí:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\left(\int_{C_1} x^2\,dy + \int_{C_2} x^2\,dy\right) = \frac{1}{\pi a^2}\left(\int_{-a}^{a} t^2 \cdot 0\,dt + \int_0^{\pi} a^2 cos^2 t \cdot a\cos t\,dt\right) = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt = 0,$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2A}\left(\int_{C_1} y^2\,dx + \int_{C_2} y^2\,dx\right) = -\frac{1}{\pi a^2}\left(\int_{-a}^{a} 0\,dt - \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot a\operatorname{sen} t\,dt\right) =$$
$$\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\operatorname{sen} t\,dt = \frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,du = \frac{4a}{3\pi}.$$