MAT 0334 - Análise Matemática II

2^a Prova - 31 de maio de 2011

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Questão 1: Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ linear, injetora e contínua. Mostre que a imagem de T é fechada se e somente se existe $C > 0$ tal que $||Tx|| \geq C||x||$ para todo $x \in X$.

Questão 2: Seja H um espaço de Hilbert e sejam $T : H \to H$ e $S : H \to H$ aplicações tais que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ para todo x e para todo y em H. Mostre que T e S são contínuas.

Questão 3: Seja Y um sub-espaço fechado do espaço de Banach complexo X, seja $T : Y \to \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo, seja x_0 um ponto de X que não pertence a Y, e seja $\tilde{Y}$ o espaço gerado por x_0 e Y.
(a) Mostre que, para todo $k \in \mathbb{C}$, $\tilde{T} : \tilde{Y} \to \mathbb{C}$ definido por $\tilde{T}(x + \lambda x_0) = Tx + \lambda k$, $x \in Y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, é contínuo.
(b) Mostre que a conclusão não vale se não supusermos que Y é fechado.

Questão 4: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e periódica de período 2π. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, defina $\hat{f}(j) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijy} f(y)\, dy$. Para cada n natural e para cada $x \in \mathbb{R}$, defina $s_n(x) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijx}$ e $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_k(x)$. Mostre que σ_n converge uniformemente para f. Pode usar sem demonstrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k} e^{ij\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2[(n+1)\theta/2]}{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$, $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.