USP – MAT 2458 – Álgebra Linear II – Turma 20

2^a Prova - 16 de outubro de 2014

Questão 1 (2,5 pts) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que consiste das soluções dos sistema linear

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x+z &= 0 \end{cases}$$

(a) Ache uma base de W. Possível resposta: $\{(1,-3-2)\}$.

(b) Ache uma base ortonormal do complemento ortogonal de W (com respeito ao produto interno usual). Possível resposta: $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \frac{1}{\sqrt{70}}(3,5,-6)\}$.

Questão 2 (2,5 pts)

(a) Aplique o processo de Gram-Schmidt à base $\{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$

(b) Escreva $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ como o produto de uma matriz ortogonal por uma matriz triangular superior.

Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Questão 3 (2,5 pts)

(a) Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resposta: $x = 3/2$, $y = 1/3$.

(b) Encontre a projeção ortogonal de $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ no espaço-coluna de $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $\begin{bmatrix} -7/6 \\ 1/3 \\ 11/6 \end{bmatrix}$.

Questão 4 (2,5 pts) Considere o espaço vetorial P_2 de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2, munido do produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

(a) Verifique que $B = \{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$ é uma base ortogonal de P_2.

(b) Seja $B' = \{1, x, x^2\}$. Encontre a matriz de transição de B para B'. Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(c) Encontre a matriz de transição de B' para B. Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$.