

Questão 1. (2 pts) Calcule: (a) $\int_0^1 \int_0^x e^{y-\frac{y^2}{2}} dy dx$, (b) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$, sendo $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 100\}$.

Solução: (a) O domínio da integral dupla, descrito pelas desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ pode ser, alternativamente, descrito pelas desigualdades $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 1$. Isto justifica a seguinte troca da ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_0^x e^{y-\frac{y^2}{2}} dy dx = \int_0^1 \int_y^1 e^{y-\frac{y^2}{2}} dx dy = \int_0^1 (1-y)e^{y-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} e^u du = e^{\frac{1}{2}} - 1.$$

(b) Em coordenadas polares, o domínio D é descrito pelas desigualdades $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 10$. Daí, temos:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{10} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{10} e^{-r^2} r dr = 2\pi \left. \frac{e^{-r^2}}{-2} \right|_0^{10} = \pi(1 - e^{-100}).$$

Questão 2. Calcule $\iint_D e^{x-y} dA$, sendo D o quadrilátero de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.

Solução: Fazemos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

O quadrado Q no plano UV de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ é levado por esta transformação no quadrado D no plano XY . Além disso,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Aplicando a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas, temos:

$$\iint_D e^{x-y} dx dy = \iint_Q e^v \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} e^v du dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \cdot 2 = e - \frac{1}{e}.$$

Questão 3. (3 pts)

Uma lâmina homogênea ocupa a região do plano $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0 \right\}$, sendo a e b constantes, $a > b > 1$. Ache as coordenadas do centro de massa dessa lâmina.

Solução: Sejam $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do centro de massa. Por simetria, observamos que $\bar{x} = 0$. Além disso, como a densidade é constante, temos:

$$\bar{y} = \frac{\int_{\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}} y \, dA - \int_{\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}} y \, dA}{\int_{\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}} 1 \, dA - \int_{\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}} 1 \, dA}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $u = x/a$, $v = y/b$ e, em seguida, usando coordenadas polares no plano UV , $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}} y \, dx \, dy &= ab \int_{\{(u,v); u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0\}} bv \, du \, dv = \\ ab^2 \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta &= ab^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{2}{3} ab^2, \\ \int_{\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}} 1 \, dx \, dy &= ab \int_{\{(u,v); u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0\}} 1 \, du \, dv = \\ ab \int_0^\pi \int_0^1 r \, dr \, d\theta &= ab \int_0^\pi 1 \, d\theta \int_0^1 r \, dr = \frac{\pi ab}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo $a = b = 1$ nas duas fórmulas acima, obtemos os valores das outras duas integrais que precisamos calcular para obter $\bar{y}$. Assim, temos:

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}(ab^2 - 1)}{\frac{\pi}{2}(ab - 1)} = \frac{4}{3\pi} \frac{ab^2 - 1}{ab - 1}.$$

Questão 4. Um sólido S é obtido extraíndo-se de uma esfera de raio R a porção dela que fica dentro de uma outra esfera, também de raio R , com centro localizado na superfície da primeira esfera. Supondo que a densidade de massa é constante e igual a 1, ache o momento de inércia de S em relação à reta que passa pelos centros das esferas.

Solução: Tomemos como eixo Z a reta que passa pelo centro das duas esferas e coloquemos a origem no centro da esfera que foi extraída da outra. As equações das duas esferas então ficam, com essa escolha de eixos cartesianos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz.$$

Substituindo a primeira dessas equações na segunda, obtemos $R^2 = 2zR$, ou seja, $z = R/2$, que é uma equação satisfeita nos pontos da interseção das duas esferas.

Introduzindo coordenadas esféricas, $z = \rho \cos \phi$, $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, as equações das esferas se transformam em

$$\rho = R \quad \text{e} \quad \rho = 2R \cos \phi,$$

e os pontos da interseção satisfazem $\rho \cos \phi = R/2$ e $\rho = R$, e, conseqüentemente, $\cos \phi = 1/2$, ou seja, $\phi = \pi/3$.

Os pontos do sólido são, portanto, os pontos que satisfazem as desigualdades

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/3, \quad R \leq \rho \leq 2R \cos \phi.$$

O momento de inércia I do sólido em relação ao eixo Z é igual à integral do quadrado da distância ao eixo Z , $d^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$, multiplicada pela densidade, que é igual a 1. Assim:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S d^2 dV = \iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_R^{2R \cos \phi} (\rho^2 \sin^2 \phi) \cdot (\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin^3 \phi \frac{(2R \cos \phi)^5 - R^5}{5} d\phi = \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi/3} (32 \cos^5 \phi - 1)(1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \cos \phi$ nessa última integral, vem:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2\pi R^5}{5} \int_1^{1/2} (32u^5 - 1)(1 - u^2) du = \frac{2\pi R^5}{5} \int_{1/2}^1 (-32u^7 + 32u^5 + u^2 - 1) du = \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \left(-\frac{32u^8}{8} + \frac{32u^6}{6} + \frac{u^3}{3} - u \right) \Big|_{1/2}^1 = \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \left[\left(-4 + \frac{16}{3} + \frac{1}{3} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{64} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{203}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

Observação: Será que cometemos algum (muito provável) erro de cálculo? O resultado que encontramos é razoável? Uma maneira de testar é calculando o *raio de rotação* do sólido S , isto é, a que distância constante do eixo deveria ficar toda a massa do sólido para que o momento de inércia fosse igual ao valor que encontramos, $\frac{203}{480} \pi R^5$. Para isso, precisamos calcular a massa do sólido, que é igual ao volume, pois a densidade é igual a 1.

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/3} \int_R^{2R \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/3} \frac{8 \cos^3 \phi - 1}{3} \sin \phi d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \int_{1/2}^1 (8u^3 - 1) du = \frac{11}{12} \pi R^3.$$

Chamando de D o raio de rotação de S , temos $\frac{11}{12} \pi R^3 D^2 = I = \frac{203}{480} \pi R^5$, logo $D^2 = R^2 \cdot \frac{203 \cdot 12}{480 \cdot 11} = \frac{203}{440} R^2$. Ou seja, $D/R = \sqrt{203/440}$, que é aproximadamente igual a 0,68, um valor intuitivamente razoável; mas, claro, este tipo de teste só detectaria um erro muito grande.