MAT 5714 (Funções Analíticas) - Pós-graduação em Matemática - IME - USP

1ª Prova - 28 de setembro de 2015

Questão 1 (2 pts) Sejam $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ deriváveis, e seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) + i\psi(\sqrt{x^2+y^2})$. Mostre que, se f for holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, então f é constante.

Questão 2 (2 pts) Mostre que não existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, que nunca se anula e $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.
`Sugestão`: Suponha que existe e mostre que, então, $1/f$ seria constante.

Questão 3 (2 pts) (a) Mostre que a série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$ tem raio de convergência igual a 1.

(b) Mostre que $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$ satisfaz $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ para todo z tal que $|z| < 1$.

Questão 4 (2 pts) (a) Mostre que tem raio de convergência maior do que ou igual a 1 a série de potências

$$\exp\left[2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right].$$

(b) Mostre que são iguais (pelo menos) os cinco primeiros termos das séries

$$\exp\left[2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right] \quad \text{e} \quad 1 + 2iz \sum_{k=0}^{\infty} (iz)^k.$$

Questão 5 (3 pts) (a) Mostre que $f(z) = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$ é analítica em $\{z;\, |z| < \dfrac{\pi}{2}\}$.

(b) Considere a série de f em torno de 0, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Mostre que $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. Calcule a_1, a_3 e a_5.

(c) Enuncie precisamente e justifique a veracidade da seguinte afirmação:

f é inversível perto de 0 e a inversa f^{-1} é analítica em 0.

(d) Mostre que são iguais (pelo menos) os três primeiros termos não-nulos das séries

$$f^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}.$$