MAT 0334 - Análise Matemática II

1^a Prova - 12 de abril de 2011

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Escolha 4 das 5 questões. Cada uma vale 2,5 pontos.

Questão 1: Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ linear satisfazendo, para a e b positivos, $||x|| < a \Rightarrow ||Tx|| < b$. Mostre que T é limitado e que $||T|| \leq b/a$.

Questão 2: Seja A um conjunto. Mostre que $X = \{f : A \to \mathbb{C};\, \exists\, F \subseteq A$ finito tal que $f(\alpha) = 0$ se $\alpha \notin F\}$ é denso em $\ell^2(A)$.

Questão 3: Para cada $n \geq 1$ inteiro, defina $g_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$, $x \in [0,1]$. Seja g_0 a função identicamente igual a 1. Mostre que $\{g_0, g_1, g_2, \cdots\}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2([0,1])$.

Questão 4: Demonstre que, se H é um espaço de Hilbert e se $S \subseteq H$ é fechado, convexo e não-vazio, então existe $x_0 \in S$ tal que $||x_0|| < ||x||$ para todo $x \in S$ com $x \neq x_0$.

Questão 5: Considere o espaço $X = C([0,1])$ munido da norma $||f|| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|x\,dx$. Mostre que o operador linear $T : X \to X$ definido por $(Tf)(x) = f(1-x)$ não é contínuo.