USP – MAT 2458 – Álgebra Linear II – Turma 20

1^a Prova - 3 de setembro de 2014

Questão 1 (3 pts) (a) Mostre que $A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15 & 0 & -20 \\ -16 & 15 & -12 \\ 12 & 20 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz de rotação.

(b) Ache o eixo da rotação.

(c) Ache o ângulo de rotação.

`Respostas`: (b) eixo paralelo ao vetor $(2, -2, -1)$, (c) $\arccos(\frac{7}{25})$.

Questão 2 (4 pts) (a) Por meio de operações elementares sobre as linhas, reduza à forma escalonada reduzida a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelas linhas de A. Justifique sua resposta.

(c) Encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelas colunas de A. Justifique sua resposta.

(d) Encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^5$ formado pelas soluções do sistema linear homogêneo que tem A como matriz de coeficientes. Justifique sua resposta.

`Respostas`: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 2)\}$,
(c) $\{(1, 0, 0, 2), (1, -1, -2, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, (d) $\{(-1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, -2, 1)\}$.

Questão 3 (1,5 pt) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\{A, B, C, D\}$ é uma base do espaço vetorial das matrizes reais 2×2.

(b) Ache as coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ em relação a essa base.

`Solução`: (a) Como a dimensão do espaço é 4 e o conjunto dado tem 4 elementos, basta mostrar que ele é linearmente independente. (b) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Questão 4 (1,5 pt) Mostre que o conjunto de funções $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ é linearmente independente.

`Solução`: O wronskiano é $2e^{3x}$, que não é identicamente nulo, logo o conjunto não é linearmente dependente. Há outras soluções mais diretas e menos trabalhosas.