1.3.2 Soluções Básicas

Claramente, o método de eliminação de Gauss também funciona para sistemas homogêneos. Na verdade, ele fornece um modo de escrever as soluções de modo conveniente, que será necessário mais adiante.

Exemplo 2 Resolva o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

e expresse as soluções como somas de múltiplos escalares de soluções específicas.

SOLUÇÃO A matriz completa é reduzida da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por essa razão, as variáveis dependentes são x_1 e x_3, e as variáveis livres x_2 e x_4 tornam-se parâmetros: $x_2 = s$ e $x_4 = t$. Assim, as equações no sistema final determinam as variáveis dependentes em termos dos parâmetros:

$$x_1 = 2s + t \quad \text{e} \quad x_3 = -2t$$

Isso significa que a solução geral é $X = [2s + t \;\; s \;\; -2t \;\; t]^T$. A nova idéia agora é separar esse resultado em parcelas, de modo que em cada uma apareça apenas um dos parâmetros s ou t:

$$X = \begin{bmatrix} 2s+t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ são soluções particulares, e a solução geral X tem a forma $X = sX_1 + tX_2$.

As soluções particulares X_1 e X_2 no Exemplo 2 são chamadas soluções básicas do sistema homogêneo. Elas têm a propriedade que toda solução X é da forma

$$X = sX_1 + tX_2 \quad \text{onde } s \text{ e } t \text{ são números arbitrários.}$$

Esse fato acontece em todo sistema homogêneo.

Para descrever a situação geral, a seguinte terminologia será útil: se $X_1, X_2, \cdots, X_k$ são colunas, uma expressão da forma

$$s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_kX_k \quad \text{onde } s_1, s_2, \cdots, s_k \text{ são números arbitários}$$

é chamada **combinação linear** das colunas $X_1, X_2, \cdots, X_k$. Dado qualquer sistema de equações lineares homogêneo, um cálculo como o feito no Exemplo 2 resulta na expressão de toda solução do sistema como uma combinação linear de certas soluções particulares. Essas soluções particulares são chamadas **soluções básicas** produzidas pelo algoritmo de Gauss. (É claro que o sistema pode ter apenas a solução trivial; nesse caso, dizemos que o sistema **não tem soluções básicas**.)

TEOREMA 2 Suponha que seja dado um sistema homogêneo de equações lineares com n incógnitas. Assuma que o posto da matriz completa seja r. Então:

(1) O algoritmo de Gauss produz exatamente $n - r$ soluções básicas.

(2) Toda solução do sistema é combinação linear dessas soluções básicas.

DEMONSTRAÇÃO Já observamos que toda solução é uma combinação linear das soluções básicas produzidas pelo algoritmo de Gauss. Pelo Teorema 3 da Seção1.2 há exatamente $n - r$ parâmetros na solução geral e, portanto, há exatamente $n - r$ soluções básicas (uma para cada parâmetro).

Exemplo 3 Encontre soluções básicas para o seguinte sistema homogêneo e compare o resultado com o Teorema 2:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_6 &= 0\\
-2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + 2x_5 - 8x_6 &= 0\\
3x_1 - 6x_2 + 12x_3 - 3x_4 + x_5 + 15x_6 &= 0\\
2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 3x_5 + 12x_6 &= 0
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO A redução da matriz completa à forma escalonada pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 5 & 0\\ -2 & 4 & -7 & 1 & 2 & -8 & 0\\ 3 & -6 & 12 & -3 & 1 & 15 & 0\\ 2 & -4 & 9 & -3 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, as variáveis livres são interpretadas como parâmetros: $x_2 = s$, $x_4 = t$ e $x_6 = u$. Então, as equações fornecem os valores das variáveis dependentes: $x_1 = 2s - 3t + 3u$, $x_3 = t - 2u$ e $x_5 = 0$. Portanto, a solução geral X é

$$X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s-3t+3u\\ s\\ t-2u\\ t\\ 0\\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 3\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

e as soluções básicas são $X_1 = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_3 = \begin{bmatrix} 3\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$.

Concluímos que há três soluções básicas, o que está de acordo com o Teorema 2 porque o posto da matriz completa é $r = 3$ e há $n = 6$ incógnitas.

As soluções básicas de um sistema homogêneo de equações lineares são úteis porque elas dão uma descrição fácil de *todas* as soluções: basta tomar todas as combinações lineares. Entretanto, as soluções básicas têm outros usos, como veremos na Seção 2.3 quando as usarmos para estudar diagonalização, umas das técnicas mais úteis da álgebra linear. Concluímos com um exemplo que aplica equações homogêneas ao balanceamento de reações químicas.

Exemplo 4 Uma reação química é um rearranjo de moléculas para formar novas substâncias químicas, em que reagentes são transformados em produtos. Por exemplo, $2Na + Cl_2 \to 2NaCl$ representa a reação de duas moléculas de sódio e uma de cloro para produzir duas moléculas de cloreto de sódio (sal de cozinha). Essa reação é balanceada no sentido que o número de átomos de cada elemento em um lado da reação é o mesmo que o número de átomos no outro lado. Como outra ilustração, considere a combustão do metano:

$$\text{Metano } (CH_4) + \text{Oxigênio } (O_2) \to \text{Dióxido de Carbono } (CO_2) + \text{Água } (H_2O).$$

Para balancear essa reação, denote respectivamente por x, y, z e w o número de moléculas de metano, oxigênio, dióxido de carbono, e água que devem estar na reação. Assim, a reação pode ser representada por

$$xCH_4 + yO_2 \to zCO_2 + wH_2O.$$

O número de átomos de cada elemento em cada lado da reação deve ser o mesmo, fornecendo as equações $x = z$ (para balancear C), $4x = 2w$ (para balancear H) e $2y = 2z + w$ (para balancear O). Essas equações podem ser escritas como um sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x \quad - z \quad &= 0 \\ 4x \quad\quad - 2w &= 0 \\ 2y - 2z - w &= 0 \end{aligned}$$

e a solução geral é $X = [t \;\; 2t \;\; t \;\; 2t]^T$, onde t é arbitrário. Como x, y, z e w devem ser inteiros positivos, a escolha $t = 1$ fornece uma solução: $x = z = 1$ e $y = w = 2$. Logo, a reação balanceada é

$$CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O.$$

Exercícios 1.3

1. Em cada caso, considere o sistema de equações homogêneo que tem a matriz dada como matriz dos coeficientes, encontre as soluções básicas do sistema, e expresse a solução geral como combinação linear dessas soluções básicas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 & -3 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

2. Encontre uma reação balanceada para as seguintes reações químicas:

a) Amônia (NH_3) + Óxido de Cobre (CuO) $\to$ Nitrogênio (N_2) + Cobre (Cu) + Água (H_2O).

b) Octano (C_8H_{18}) + Oxigênio (O_2) $\to$ Dióxido de Carbono (CO_2) + Água (H_2O).

3. Explique a diferença entre sistema geral e homogêneo de equações, e quais são as implicações para as soluções.

4. Suponha que um sistema homogêneo tenha 4 equações e 6 incógnitas e seja A sua matriz completa.

a) Pode o sistema ter uma única solução? Nenhuma solução? Justifique sua resposta.

b) Quantos parâmetros o sistema pode ter? Justifique sua resposta.

c) Quantos parâmetros o sistema pode ter, se uma linha de A é um múltiplo de uma outra linha? Justifique sua resposta.

d) Quantos parâmetros o sistema pode ter, se $posto(A) = 4$? Justifique sua resposta.

e) Quantos parâmetros o sistema pode ter, se $posto(A) = 2$? Justifique sua resposta.

5. Mostre que a recíproca do Teorema 1 não é verdadeira. Isto é, mostre que se um sistema homogêneo possui uma solução não-trivial, ele pode *não* ter mais incógnitas que equações.

6. Se um sistema tem mais equações que incógnitas, ele pode ter uma única solução? Justifique sua resposta.

7. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira, ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Assuma que é dado um sistema de equações com matriz completa A e forma escalonada reduzida R.

a) Se o sistema é homogêneo, toda solução é trivial.

b) Se o sistema possui uma solução não-trivial, ele não pode ser homogêneo.

c) Se o sistema possui uma solução trivial, ele deve ser homogêneo.

d) Se o sistema é homogêneo e possui uma solução não-trivial, R tem uma linha de zeros.

e) Se o sistema é homogêneo e possui uma solução não-trivial, então ele tem infinitas soluções não-triviais.

f) Se um sistema é homogêneo e R têm uma linha de zeros, existem soluções não-triviais.

g) Se A é uma matriz $m \times n$ e de $posto(A) = m$, o sistema têm apenas a solução trivial.

8. Para um sistema homogêneo que tem C como matriz dos coeficientes e A como matriz completa, mostre que $posto(A) = posto(C)$.

18. Se A é $n \times n$, utilize o Teorema 1 para mostrar que $det(kA) = k^n\, detA$ para todos os escalares k (isso é o Teorema 3 da Seção 2.1). [Sugestão: Mostre, primeiro, que $kA = (kI)A$.]

19. **a)** Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $A^2 = -I$.

b) Mostre que não existe uma matriz A 3×3 tal que $A^2 = -I$.

20. Se A é $n \times n$ e inversível, mostre que
$$det(adjA) = (detA)^{n-1}.$$

21. Se A é 3×3 e $detA = 2$, calcule $det[-A^2(adjA)^{-1}]$.

22. Se A é $n \times n$ e $detA = 2$, calcule $det[A^{-1} + adjA]$.

23. **a)** Se $A = UB$ onde $detU = 1$, mostre que $detA = detB$.

b) Se A e B são inversíveis e $detA = detB$, mostre que $A = UB$ para alguma matriz inversível U tal que $detU = 1$.

2.3 DIAGONALIZAÇÃO E AUTOVALORES

Um problema central em aplicações da álgebra linear é descrever sistemas que se alteram com o tempo. O Exemplo 1 a seguir mostrará que isso, freqüentemente, passa a ser encontrar uma forma de se calcular eficientemente as potências $A, A^2, A^3, \cdots$ de uma matriz quadrada A. Nesta seção, apontaremos um método para se fazer isso. A técnica é chamada diagonalização e é uma das idéias mais importantes em álgebra linear.

2.3.1 Um Modelo de Dinâmica Populacional

Começamos com um exemplo para motivar o método.

Exemplo 1 Estamos interessados em como uma população de uma espécie de pássaros ameaçada de extinção se altera com o tempo. Como o número de machos é aproximadamente igual ao de fêmeas, vamos contar somente as fêmeas. Cada fêmea é considerada jovem por um ano e então entra na fase adulta. Somente adultos têm filhotes. Após k anos, a população de fêmeas pode ser expressa como uma soma do tipo $a_k + j_k$, onde

a_k denota o número de adultos após k anos,

j_k denota o número de jovens após k anos.

Vamos supor que conhecemos os valores iniciais a_0 e j_0 e estamos interessados em calcular a_k e j_k para $k = 1, 2, \cdots$. Para isso, modelamos o crescimento populacional do seguinte modo. Vamos supor que $j_{k+1} = 2a_k$, ou seja, que o número de jovens em qualquer ano é, em média, duas vezes o número de fêmeas adultas vivas no ano anterior. Também vamos supor que $\frac{1}{2}$ dos pássaros adultos, em qualquer ano, sobrevive para o próximo ano, mas somente $\frac{1}{4}$ dos jovens passa para a vida adulta. Portanto, o número a_{k+1} de adultos, em qualquer ano, é dado por $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{4}j_k$. Então, os números a_k e j_k em anos sucessivos são relacionados pelas seguintes equações:

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{2}a_k + \tfrac{1}{4}j_k$$
$$j_{k+1} = 2a_k$$

Se considerarmos $V_k = \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, essas equações tomam a forma matricial simples

$$V_{k+1} = AV_k \quad \text{para cada } k = 1, 2, \cdots. \qquad (*)$$

A coluna V_k é chamada *perfil populacional* para a espécie. Como o perfil inicial $V_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ j_0 \end{bmatrix}$ é suposto conhecido, (*) nos dá sucessivamente: $V_1 = AV_0$, $V_2 = AV_1 = A^2V_0$, $V_3 = AV_2 = A^3V_0$ etc. Em geral, obtemos

$$V_k = A^kV_0 \quad \text{para cada } k = 1, 2, \cdots.$$

Assim, para encontrarmos V_k (e, portanto, a_k e j_k) é suficiente calcular as potências A^k de uma matriz A. Nesta seção, veremos um método importante para se fazer isso. Esse exemplo é uma ilustração de um sistema dinâmico linear, e voltaremos a ele na próxima seção.

Calcular diretamente as potências A^k de uma matriz pode consumir muito tempo, o que ocorre na prática para matrizes grandes. Além disso, freqüentemente, estamos interessados somente no comportamento em longo prazo de $V_k = A^k V_0$, conforme k aumenta e onde V_0 é um vetor coluna fixo. Assim, adotamos um método indireto, muito utilizado em aplicações, que nos permite calcular facilmente as potências A^k de modo explícito e que, também, nos dá informações sobre o comportamento no longo prazo. A idéia é primeiro **diagonalizar** a matriz A, ou seja, encontrar uma matriz inversível P tal que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{é uma matriz diagonal.} \qquad (**)$$

Temos dois motivos para fazer isso: primeiro, as potências D^k de uma matriz diagonal são fáceis de ser calculadas (veremos mais sobre isso adiante); segundo, (**) permite-nos calcular as potências A^k de uma matriz A em função das potências D^k de D. De fato, podemos isolar A em (**) para obter $A = PDP^{-1}$. Elevando-se ao quadrado, temos

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}.$$

Utilizando isso, podemos calcular A^3 por:

$$A^3 = AA^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD^3P^{-1}.$$

Continuando nesse caminho (e percebendo que isso funciona mesmo que D não seja diagonal), obtemos

TEOREMA 1 Se $A = PDP^{-1}$, então $A^k = PD^kP^{-1}$ para cada $k = 1, 2, \cdots$.

Assim, calcular A^k passa a ser encontrar a matriz inversível P na equação (**). Para fazer isso, é necessário primeiro calcular alguns números (chamados autovalores) associados à matriz A.

2.3.2 Autovalores e Autovetores

Se A é uma matriz $n \times n$, um número λ é chamado um **autovalor** de A se

$$AX = \lambda X \quad \text{para algum vetor coluna } X \neq 0.$$

Tal vetor coluna não nulo X é chamado um **autovetor** de A associado ao autovalor λ. Observe que a condição $AX = \lambda X$ é automaticamente satisfeita se $X = 0$; assim, a condição $X \neq 0$ é crucial.

Exemplo 2 Considere a matriz A de tamanho $2 \times 2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Então $\lambda = 3$ é um autovalor de A com autovetor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, já que $X \neq 0$ e $AX = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3X$.

A matriz no Exemplo 2 possui um outro autovalor além do $\lambda = 3$. Para encontrá-lo, desenvolvemos o procedimento geral a seguir que funciona para qualquer matriz A de tamanho $n \times n$. Por definição, um número λ é um autovalor de A se, e somente se,

$$AX = \lambda X \text{ para algum } X \neq 0.$$

Se I é a matriz identidade de mesma ordem que A, isso é equivalente a dizer que o sistema linear homogêneo

$$(\lambda I - A)X = 0$$

possui uma solução não-trivial $X \neq 0$. Pelo Teorema 5 da Seção 1.5 isso acontece se, e somente se, a matriz $\lambda I - A$ é não inversível, e isso por sua vez ocorre se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes é nulo:

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Essa última condição nos leva à seguinte definição: se A é uma matriz $n \times n$, o **polinômio característico** $c_A(x)$ de A é definido por

$$c_A(x) = det(xI - A).$$

Note que $c_A(x)$ é de fato um polinômio[6] na variável x, e possui grau n se A é uma matriz $n \times n$ (isso é ilustrado no exemplo abaixo).

Essa discussão mostra que um número λ é um autovalor de A se, e somente se, $c_A(\lambda) = 0$, isto é se, somente se, λ é a **raiz** do polinômio característico $c_A(x)$. Além disso, o procedimento mostra um método para encontrar os autovetores X de A associados a λ. De fato, X é determinado pela condição $(\lambda I - A)X = 0$, e, assim, os autovetores X são as soluções (não nulas) desse sistema homogêneo de equações lineares. Registramos essas observações no

TEOREMA 2 Seja A uma matriz $n \times n$.

(1) Os autovalores λ de A são as raízes do polinômio característico $c_A(x)$ de A.

(2) Os autovetores X associados a λ são as soluções (não nulas) do sistema homogêneo

$$(\lambda I - A)X = 0$$

de equações lineares com matriz dos coeficientes $\lambda I - A$.

Observe que, uma vez que sabemos que o número λ é um autovalor de A, encontrar as soluções da equação $(\lambda I - A)X = 0$ (e, portanto, encontrar os autovetores) é uma aplicação rotineira da eliminação de Gauss. Aqui, temos dois exemplos.

Exemplo 3 Encontre o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ discutida no Exemplo 2 e, então, encontre todos os autovalores e seus autovetores.

SOLUÇÃO Como $xI - A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-5 & 2 \\ -4 & x+1 \end{bmatrix}$, temos

$$c_A(x) = det\begin{bmatrix} x-5 & 2 \\ -4 & x+1 \end{bmatrix}$$
$$= (x-5)(x+1) + 8 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1).$$

Assim, as raízes de $c_A(x)$ são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ e, portanto, esses são os autovalores de A. Observe que $\lambda_1 = 3$ foi o autovalor mencionado no Exemplo 2, mas encontramos também um outro: $\lambda_2 = 1$.

Para encontrar os autovetores associados $\lambda_2 = 1$, observe que nesse caso

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} \lambda_2 - 5 & 2 \\ -4 & \lambda_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

e as soluções para $(\lambda_2 I - A)X = 0$ são $X = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ onde t é um número real qualquer.

Portanto, os autovetores X associados a λ_2 são $X = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ onde $t \neq 0$ é arbitrário. Uma escolha conveniente é $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, onde $t = 2$. Analogamente, $\lambda_1 = 3$ dá origem aos autovetores $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$, que inclui a observação no Exemplo 2.

Observe que existem *muitos* autovetores para uma matriz quadrada A associados a um dado autovalor λ, de fato, *toda* solução não nula X de $(\lambda I - A)X = 0$ é um autovetor. Claro que o autovalor λ é escolhido de modo que *devam* existir soluções não nulas.

[6] Um **polinômio** é uma expressão da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, onde os a_i são números e x é uma variável. Se $a_n \neq 0$, o número n é chamado **grau** do polinômio e a_n é o **coeficiente dominante**. Assim, $2 - 5x + 2x^2 - x^4$ é um polinômio de grau 4 com coeficiente principal -1. Polinômios são discutidos no Apêndice A.3.

Exemplo 4 Encontre o polinômio característico, autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO Aqui, o polinômio característico é dado por

$$c_A(x) = det \begin{bmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 3 & x \end{bmatrix}$$
$$= (x-1)\, det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} = (x-1)(x+1)(x-3)$$

de modo que os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, e $\lambda_3 = 3$. Para encontrar os autovetores para $\lambda_1 = 1$, calcule

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda_1 - 2 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queremos as soluções (não nulas) para $(\lambda_1 I - A)X = 0$. A matriz completa passa a ser

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizando operações com as linhas. Assim, as soluções X de $(\lambda_1 I - A)X = 0$ são $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $t \neq 0$ é arbitrário, e podemos utilizar a solução básica $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ como um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$. Analogamente, autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$ são $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, respectivamente, como você pode verificar.

Existem alguns comentários que devem ser feitos nesse ponto:

Observação 1 Os autovalores de uma matriz real não são necessariamente números reais (como aconteceu nos exemplos anteriores). Por exemplo, o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é $x^2 + 1$ e os autovalores de A são as raízes complexas não reais $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Retornaremos a esse assunto na Seção 2.5.

Observação 2 Uma matriz $n \times n$ sempre tem n (possivelmente complexos) autovalores, mas eles podem não ser distintos (como aconteceu nos exemplos anteriores). Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ possui polinômio característico $c_A(x) = (x-1)^2$ e, portanto, existe somente um autovalor $\lambda = 1$. Entretanto, λ é uma raiz dupla de $c_A(x)$ e dizemos que ela tem multiplicidade 2. Voltaremos aos autovalores repetidos adiante (Teorema 5).

Observação 3 Na prática, os autovalores de uma matriz quadrada A, freqüentemente, não são calculados como as raízes do polinômio característico. Existem métodos numéricos iterativos (por exemplo, o método do poder ou o algoritmo QR) que são mais eficientes para matrizes de ordem grande. Esses algoritmos (e outros) são descritos em livros sobre álgebra linear computacional.

fora

2.3.3 Diagonalização

Uma matriz $n \times n$ é uma **matriz diagonal** se todos os seus elementos da diagonal principal são zeros, ou seja, se D tem a forma

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são números. Usaremos a notação $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ por conveniência. Cálculos com matrizes diagonais são fáceis de ser feitos. Por exemplo, se $n = 2$ temos

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, cada operação corresponde a fazê-la somente nos correspondentes elementos da diagonal principal.

Em geral, se $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ e $E = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ são duas matrizes diagonais, seus produto DE e soma $D + E$ ainda são diagonais e são obtidos, como no caso 2×2, ao fazermos as mesmas operações nos correspondentes elementos da diagonal principal:

$$DE = diag(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \cdots, \lambda_n\mu_n)$$
$$D + E = diag(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \cdots, \lambda_n + \mu_n)$$

A simplicidade dessas fórmulas é uma razão para que a seguinte notação seja tão importante.

Uma matriz quadrada A $n \times n$ matrix é dita **diagonalizável** se

$$P^{-1}AP \text{ é diagonal para alguma matriz inversível } P \ n \times n.$$

Nesse caso, a matriz inversível P é chamada **matriz diagonalizadora** de A. Para descobrir quando tal matriz P existe, sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ as colunas de P e procure maneiras de determinar quando tal X_i existe e como calculá-lo. Para terminar, escreva P em função de suas colunas do seguinte modo:

$$P = [X_1 \ \ X_2 \ \ \cdots \ \ X_n].$$

A condição $P^{-1}AP = D$ vale para alguma matriz diagonal D se, e somente,

$$AP = PD$$

e continuamos por escrever cada lado dessa equação em função de suas colunas. Se $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, onde os λ_i são números a ser determinados, a equação $AP = PD$ torna-se

$$A[X_1 \ \ X_2 \ \ \cdots \ \ X_n] = [X_1 \ \ X_2 \ \ \cdots \ \ X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pela definição de multiplicação matricial cada lado é simplificado por

$$[AX_1 \ \ AX_2 \ \ \cdots \ \ AX_n] = [\lambda_1X_1 \ \ \lambda_2X_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_nX_n].$$

Comparando as colunas, temos que $AX_1 = \lambda_1X_1, AX_2 = \lambda_2X_2, \cdots$ etc. e, portanto,

$$P^{-1}AP = D \quad \text{se, e somente se,} \quad AX_i = \lambda_iX_i \text{ para cada } i.$$

Em outras palavras, $P^{-1}AP = D$ vale se, e somente se, os elementos da diagonal principal de D são autovalores de A e as colunas de P são os correspondentes autovetores. Isso prova o seguinte resultado fundamental.

TEOREMA 3 Seja A uma matriz $n \times n$.

(1) A é diagonalizável se, e somente se, ela possui autovetores $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tais que a matriz $P = [X_1 \ \ X_2 \ \ \cdots \ \ X_n]$ é inversível.

(2) Quando esse for o caso, $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ onde, para cada i, λ_i é o autovalor de A associado ao X_i.

Exemplo 5 Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Pelo Exemplo 4, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, e $\lambda_3 = 3$ com autovetores associados $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, e $X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Como a matriz

$P = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ é inversível, o Teorema 3 garante que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Você pode verificar isso diretamente.

Observação 4 No Exemplo 5, seja $Q = [X_2 \ \ X_1 \ \ X_3]$ a matriz formada pelos autovetores X_1, X_2 e X_3 de A, mas em uma *ordem diferente* da utilizada para formar P. Então $Q^{-1}AQ = D = diag(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$ é diagonal, pelo Teorema 3, mas os autovalores estão na *nova* ordem. Isso significa que podemos escolher a matriz diagonalizadora P de modo que os autovalores λ_i apareçam na diagonal principal de D, na ordem que queremos.

Observação 5 Por outro lado, podemos multiplicar qualquer coluna de P por uma constante não nula sem alterar D (porque a coluna resultante ainda é um autovetor). Isso é, algumas vezes, conveniente para simplificar a forma de P.

Infelizmente, nem toda matriz quadrada A é diagonalizável. Entretanto, se os autovalores de A forem todos distintos (como no Exemplo 5), a matriz P de autovetores *será* inversível (e, portanto, A é diagonalizável). Registramos esse resultado no próximo teorema; a demonstração é deixada para a Seção 4.7.

TEOREMA 4 Se A é uma matriz $n \times n$ com n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Entretanto, muitas matrizes com autovalores repetidos *são* diagonalizáveis. O exemplo a seguir exibe uma matriz desse tipo.

Exemplo 6 Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO Para calcular o polinômio característico de A, primeiro some as linhas 2 e 3 à linha 1:

$$c_A(x) = det\begin{bmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} x-2 & x-2 & x-2 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & x+1 \end{bmatrix} = (x-2)(x+1)^2.$$

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, com λ_2 repetido duas vezes (dizemos que λ_2 tem *multiplicidade* dois). Assim, o Teorema 4 não se aplica. Entretanto, *A é* diagonalizável.

Para $\lambda_1 = 2$ o sistema de equações $(\lambda_1 I - A)X = 0$ tem solução geral $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, então solução básica $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 2$. Passando para o autovalor repetido $\lambda_2 = -1$, devemos resolver o $(\lambda_2 I - A)X = 0$. Pela eliminação de Gauss, a solução geral é $X = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde s e t são arbitrários. Assim, as soluções básicas $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $Y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são *ambos* autovetores de A associados a $\lambda_2 = -1$ e surgem naturalmente do algoritmo de Gauss. Se tomarmos $P = [X_1 \;\; X_2 \;\; Y_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que P é inversível.

Portanto, $P^{-1}AP = diag(2, -1, -1)$ pelo Teorema 3.

O Exemplo 6 é uma situação típica para qualquer matriz diagonalizável. Para descrever o caso geral, precisamos de alguma terminologia. Um autovalor λ de uma matriz quadrada tem **multiplicidade** m se ele aparecer m vezes como raiz do polinômio característico $c_A(x)$. Quando o sistema homogêneo $(\lambda I - A)X = 0$ é solucionado, qualquer conjunto de soluções básicas é chamado um conjunto de **autovetores básicos** associados a λ (ver Observação 5 da Seção 2.3). Lembre-se que o número de autovetores básicos é igual ao número de parâmetros envolvidos na solução do sistema $(\lambda I - A)X = 0$.

Assim, o autovalor $\lambda_2 = -1$ no Exemplo 6 tem multiplicidade 2. Nesse caso, o algoritmo de Gauss nos leva a *dois* autovetores associados a $\lambda_2 = -1$, vindos do fato que a solução geral do sistema $(\lambda_2 I - A)X = 0$ envolve *dois* parâmetros. Isso funciona em geral: uma matriz é diagonalizável se, e somente se, todo autovalor de multiplicidade m tiver m autovetores básicos. Isso é o conteúdo do teorema a seguir; a demonstração será dada na Seção 4.7.

TEOREMA 5 Uma matriz quadrada A é diagonalizável se, e somente se, ela satisfaz às seguintes condições:

A multiplicidade de todo autovalor λ de A é igual ao número de autovetores básicos associados a λ, que é o número de parâmetros na solução de $(\lambda I - A)X = 0$.

Nesse caso, as soluções básicas do sistema $(\lambda I - A)X = 0$ tornam-se colunas da matriz diagonalizadora inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

De fato, temos que o número de autovetores básicos associados a um autovalor λ *nunca* pode *exceder* a multiplicidade de λ. Assim, uma matriz quadrada é não diagonalizável se, e somente se, ela tiver um autovalor λ de multiplicidade m para o qual o sistema $(\lambda I - A)X = 0$ possui *menos* do que m soluções básicas. Por essa razão, matrizes não diagonalizáveis são muitas vezes chamadas **defectivas**.

O procedimento a seguir resume o Teorema 5.

ALGORITMO DE DIAGONALIZAÇÃO

Para diagonalizar uma matriz A $n \times n$:

Passo 1. Encontre os autovalores λ de A.

Passo 2. Calcule os autovetores básicos associados a cada um desses autovalores λ, a partir das soluções básicas do sistema homogêneo $(\lambda I - A)X = 0$.

Passo 3. A matriz A é diagonalizável se, e somente se, existem ao todo n autovetores básicos.

Passo 4. Se A é diagonalizável, a matriz P, $n \times n$, formada pelos autovetores nas colunas, é uma matriz diagonalizadora para A; ou seja, P é inversível e $P^{-1}AP$ é diagonal.

Observação 6 O algoritmo de diagonalização é válido mesmo se os autovalores forem números complexos não reais. Nesse caso, os autovetores também serão complexos, mas não trataremos desse assunto aqui.

Exemplo 7 Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é não diagonalizável.

SOLUÇÃO 1 O polinômio característico de A é $c_A(x) = (x-1)^2$, de modo que A possui somente um autovalor $\lambda_1 = 1$, que tem multiplicidade 2. Mas, o sistema de equações $(\lambda_1 I - A)X = 0$ tem solução geral $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, de modo que existe somente uma solução básica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto, A é não diagonalizável, pelo Teorema 5.

SOLUÇÃO 2 Se A fosse diagonalizável, existiria uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$ é diagonal. Pelo Teorema 3, os elementos da diagonal principal de D devem ser os autovalores de A, assim, $D = I$ porque 1 é o único autovalor de A. Assim, $P^{-1}AP = I$e, portanto, $A = PIP^{-1} = I$, o que é um absurdo. Logo, A é não diagonalizável.

2.3.4 Matrizes Semelhantes

Se A e B são matrizes $n \times n$, dizemos que A e B são *semelhantes* se

$$B = P^{-1}AP \text{ para alguma matriz inversível } P.$$

Quando for esse o caso, escrevemos $A \sim B$. A linguagem de similitude é usada em toda a álgebra linear. Por exemplo, nessa terminologia, a matriz A é diagonalizável se, e somente se, ela é semelhante a uma matriz diagonal.

Se $A \sim B$ então, necessariamente, $B \sim A$. Para ver por quê, suponha que $B = P^{-1}AP$. Então $A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$, onde $Q = P^{-1}$. Como Q é inversível, isso demonstra que o item 2 das propriedades de similitude a seguir (as demais estão no Exercício 18):

1. $A \sim A$ para toda matriz quadrada A.
2. Se $A \sim B$, então $B \sim A$. (*)
3. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Essas propriedades são freqüentemente expressas por dizer que a relação de semelhança $\sim$ é uma *relação de equivalência* no conjunto das matrizes $n \times n$. Além disso, similitude é compatível com inversas, transpostas e potências no seguinte sentido:

$$\text{Se } A \sim B, \text{ então } \begin{cases} A^{-1} \sim B^{-1} \\ A^T \sim B^T \\ A^k \sim B^k \text{ para todo} \geq 0. \end{cases} \qquad (**)$$

As demonstrações são cálculos matriciais rotineiros (Exercício 18). Além disso, matrizes semelhantes possuem muitas propriedades, algumas das quais estão agrupadas, para referência, no teorema a seguir.

TEOREMA 6 Se A e B são matrizes $n \times n$ semelhantes, então:

(1) $det A = det B$.

(2) $c_A(x) = c_B(x)$.

(3) A e B possuem os mesmos autovalores.

DEMONSTRAÇÃO Seja $B = P^{-1}AP$ para alguma matriz inversível P.

(1) $det B = det(P^{-1})\, det A\, det P = det A$ porque $det(P^{-1}) = 1/\,det P$.

(2) Verifica-se que $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$. Portanto, (1) diz que $c_B(x) = det(xI - B) = det\{P^{-1}(xI - A)P\} = det(xI - A) = c_A(x)$.

(3) Os autovalores de uma matriz são as raízes de seu polinômio característico, assim, por (2) se verifica.

A classe das matrizes diagonalizáveis é bem comportada porque essas matrizes são semelhantes a matrizes diagonais. Aqui temos dois exemplos.

Exemplo 8 Se A é semelhante a B e/ou A ou B é diagonalizável, mostre que a outra também é diagonalizável.

SOLUÇÃO Temos que $A \sim B$. Suponha que A é diagonalizável, digamos $A \sim D$, onde D é diagonal. Como $B \sim A$ por (*), temos $B \sim A$ e $A \sim D$. Portanto, $B \sim D$ por (*), logo B também é diagonalizável. Um argumento semelhante funciona se supusermos que B é diagonalizável.

Exemplo 9 Se A é diagonalizável, mostre que A^T, A^{-1} (se existir) e A^k (para cada $k \geq 1$) são todas diagonalizáveis.

SOLUÇÃO Como A é diagonalizável, temos que $A \sim D$, onde D é uma matriz diagonal. Portanto, (**) nos dá que $A^T \sim D^T$, $A^{-1} \sim D^{-1}$ e $A^k \sim D^k$ e o resultado segue porque D^T, D^{-1} e D^k são todas diagonais.

Suponha que A é diagonalizável, digamos $P^{-1}AP = D$ é diagonal. O Teorema 6 mostra que A e D possuem os mesmos autovalores. Mas, os autovalores da matriz D são os elementos da diagonal principal (verifique), de modo que os elementos da diagonal de D devem ser os autovalores de A em alguma ordem. Isso significa que A herda muitas propriedades de D e, portanto, seus autovalores. O exemplo a seguir ilustra como isso acontece.

Exemplo 10 Seja A uma matriz 2×2 diagonalizável. Se $\lambda^4 = 5\lambda$ para cada autovalor λ de A, mostre que $A^4 = 5A$.

SOLUÇÃO Seja $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A e P é inversível. Então,

$$D^4 = \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\lambda_1 & 0 \\ 0 & 5\lambda_2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = 5D.$$

Como $A = PDP^{-1}$ (obtido isolando-se A em $P^{-1}AP = D$), temos

$$A^4 = (PDP^{-1})^4 = PD^4P^{-1} = P(5D)P^{-1} = 5(PDP^{-1}) = 5A$$

pelo Teorema 1.

O resultado do Exemplo 10 pode ser formulado por: seja $p(x) = x^4 - 5x$. Então, o exemplo garante que se $p(\lambda) = 0$ para todo autovalor λ de A, então $p(A) = 0$. Isso funciona de modo mais geral.

Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ é um polinômio qualquer, o **cálculo** de $p(x)$ na matriz (quadrada) A é definida por

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_kA^k$$

onde I é a matriz identidade de mesma ordem que A. Então, o método utilizado no Exemplo 10 mostra que se A é diagonalizável e se $p(x)$ é um polinômio qualquer tal que $p(\lambda) = 0$ para todo autovalor λ de A então necessariamente $p(A) = 0$. Em particular, o polinômio característico $c_A(x)$ certamente tem a propriedade de que $c_A(\lambda) = 0$ para cada autovalor de A, e devemos ter que $c_A(A) = 0$. Em outras palavras, isso mostra que $c_A(A) = 0$ para toda matriz diagonalizável A. De fato, isso vale para *toda* matriz quadrada A e, de modo geral, é chamado

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON Se A é uma matriz quadrada, então $c_A(A) = 0$.

A demonstração é dada na Seção 5.6.

Exercícios 2.3

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a)[†] Calcule, diretamente, a matriz potência A^{20}.

b) Utilize o fato de que A é diagonalizável para calcular A^{20}; ou seja, existem matrizes P e D tais que $P^{-1}AP = D$

$$\text{onde } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D.$$

c) Explique os benefícios de se diagonalizar a matriz para calcular suas potências.

2. Em cada caso, encontre o polinômio característico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

3. Escreva sua própria descrição breve de como encontrar autovalores de uma matriz A, os autovetores associados e uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

4. Se $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal, quem são os elementos da diagonal principal de D e as colunas de P?

5. a) Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ é não diagonalizável.

b) Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é não diagonalizável a menos que $c = 0$.

6. Em cada caso, determine se A é diagonalizável. Justifique sua resposta.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

7. Em cada caso, ou mostre que a sentença é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, A representa uma matriz quadrada.

a) Se A possui autovalores reais, então ela é diagonalizável.

b) Se A é diagonalizável, então ela possui autovalores distintos.

c) Se todos os autovalores de A são reais e distintos, então ela é diagonalizável.

d) Se A é diagonalizável, então sua transposta A^T também é diagonalizável.

e) Toda matriz inversível é diagonalizável.

f) Toda matriz diagonalizável é simétrica.

g) Se A não tem inversa, então $\lambda = 0$ é um autovalor de A.

h) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de A, então A não possui inversa.

8. Se λ é um autovalor de A e se α é um número, mostre que $\lambda - \alpha$ é um autovalor de $A_1 = A - \alpha I$. Como os autovetores se comparam?

9. Encontre os autovalores de $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

10. Se X e Y são autovetores de A associados a λ, mostre que o mesmo é válido para $X + Y$ e aX para qualquer número a (desde que $X + Y$ e aX sejam não nulos).

11. Se λ é um autovalor de A, mostre que:

a) $k\lambda$ é um autovalor de kA para cada número real k.

b) λ^2 é um autovalor de A^2.

c) $3 - 2\lambda + 5\lambda^3$ é um autovalor de $3I - 2A + 5A^3$.

12. Seja A uma matriz inversível.

a) Se λ é um autovalor de A, mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1}.

b) Mostre que todo autovalor μ de A^{-1} tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$ onde λ é algum autovalor de A.

13. Se $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ e $E = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, mostre que

a) $D + E = diag(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \cdots, \lambda_n + \mu_n)$

b) $DE = diag(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \cdots, \lambda_n\mu_n)$

c) $D^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$ para cada inteiro $k \geq 1$.

14. a) Mostre que A e sua transposta A^T possuem os mesmos polinômios característicos [Sugestão: $xI = (xI)^T$.]

b) Se A é diagonalizável, mostre que A^T é diagonalizável.

15. Se A é diagonalizável com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, mostre que $detA = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

16. a) Se $A^{-1} = A$ e λ é um autovalor de A, mostre que $\lambda = \pm 1$.

b) Se A é diagonalizável e todos os autovalores são ± 1, mostre que $A^{-1} = A$.

17. a) Se $A^2 = A$ e λ é um autovalor de A, mostre que $\lambda = 0, 1$.

b) Se A é diagonalizável e todos os autovalores são 0 ou 1, mostre que $A^2 = A$.

18. Se A e B são matrizes quadradas, mostre que:

a) Se $B = QAQ^{-1}$ para alguma matriz inversível Q, então $A \sim B$.

b) $A \sim A$ para toda matriz quadrada A.

c) Se $A \sim B$, então $B \sim A$.

d) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

e) Se $A \sim B$, então $detA = detB$.

f) Se $A \sim B$, então $A^{-1} \sim B^{-1}$.

g) Se $A \sim B$, então $A^k \sim B^k$ para todo inteiro $k \geq 1$.

h) Se $A \sim B$, então $A^T \sim B^T$.

[†] Requer auxílio do computador (por exemplo, Matlab).

19. Suponha que A tem autovalores λ_1 e λ_2 com autovetores associados X_1 e X_2.

a) Encontre A se $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Encontre A se $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

20. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, mostre que:

a) $c_A(x) = x^2 - (trA)x + detA$ onde $trA = a + d$ é chamado **traço** de A.

b) Os autovalores de A são $\lambda = \frac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$.

21. a) Se D é diagonal com autovalores distintos e se $CD = DC$, mostre que C também é diagonal. [Sugestão: Compare o elemento (i, j) em $CD = DC$.]

b) Se A é diagonalizável com autovalores distintos e se $BA = AB$, mostre que B também é diagonalizável. [Sugestão: Utilize **a)**.]

2.4 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Começamos a Seção 2.3 com um exemplo de ecologia que modela a evolução populacional de uma espécie de pássaros ao longo do tempo. Como prometido, completamos o exemplo e o estendemos a outras situações.

2.4.1 Sistemas Dinâmicos Lineares

A população de pássaros foi descrita computando-se o perfil da população de fêmeas $V_k = \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$ da espécie, onde a_k e j_k representam o número de fêmeas adultas e jovens presentes k anos após os valores iniciais a_0 e j_0 serem observados. O modelo supõe que esses números estão relacionados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \tfrac{1}{2}a_k + \tfrac{1}{4}j_k \\ j_{k+1} &= 2a_k \end{aligned}$$

Sendo $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, esse sistema passa a ter a seguinte forma matricial

$$V_{k+1} = AV_k \text{ para cada } k = 1, 2, \cdots.$$

Assim $V_1 = AV_0$, seguindo $V_2 = AV_1 = A^2V_0$ e, em geral,

$$V_k = A^kV_0 \text{ para } k = 1, 2, \cdots.$$

Agora, podemos utilizar nossas técnicas de diagonalização para determinar o perfil populacional V_k para todos os valores de k em função dos valores iniciais.

Exemplo 1 Supondo que os valores iniciais foram $a_0 = 100$ fêmeas adultas e $j_0 = 40$ fêmeas jovens, calcule a_k e j_k para $k = 1, 2, \cdots$.

SOLUÇÃO O polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é $c_A(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, de modo que os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ e o método de eliminação de Gauss nos dá os autovetores básicos associados $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por conveniência (ver Observação 5 da Seção 2.3), podemos utilizar múltiplos $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, respectivamente. Portanto, a matriz diagonalizadora é $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e obtemos

$$P^{-1}AP = D \quad \text{onde} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$