Usando o mapa de contornos para estimar o valor de f no ponto central de cada sub-retângulo obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{276}\int_0^{388} f(x, y)\,dx\,dy &\approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A \\ &\approx \Delta A[0{,}4 + 1{,}2 + 1{,}8 + 3{,}9 + 0 + 3{,}9 + 4{,}0 + 6{,}5 \\ &\qquad + 0{,}1 + 6{,}1 + 16{,}5 + 8{,}8 + 1{,}8 + 8{,}0 + 16{,}2 + 9{,}4] \\ &= (6693)(88{,}6)\end{aligned}$$

Portanto
$$f_{\text{méd}} \approx \frac{(6693)(88{,}6)}{(388)(276)} \approx 5{,}5$$

Em 24 de dezembro de 1982 o estado do Colorado recebeu uma média de $5\frac{1}{2}$ polegadas de neve.

Propriedades das Integrais Duplas

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser provadas como na Seção 5.2 do Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são referidas como *linearidade* da integral.

Integrais duplas se comportam assim porque as somas duplas que as definem se comportam dessa forma.

$$\boxed{7} \qquad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA + \iint_R g(x, y)\,dA$$

$$\boxed{8} \qquad \iint_R cf(x, y)\,dA = c\iint_R f(x, y)\,dA \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante.}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R, então

$$\boxed{9} \qquad \iint_R f(x, y)\,dA \geq \iint_R g(x, y)\,dA$$

15.1 Exercícios

1. Determine uma aproximação para $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$ utilizando os mesmos sub-retângulos do Exemplo 3 mas escolhendo o ponto amostra em cada sub-retângulo como
   (a) canto superior esquerdo, (b) canto superior direito,
   (c) canto inferior esquerdo, (d) canto inferior direito.

2. Determine a aproximação do volume do Exemplo 1 utilizando a Regra do Ponto Médio.

3. (a) Estime o volume do sólido contido abaixo da superfície $z = x^2 + 4y$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$. Utilize a soma de Riemann com $m = 2$, $n = 3$, e tome o ponto amostra como o canto superior direito de cada sub-retângulo
   (b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

4. Se $R = [-2, 2] \times [-1, 1]$, use a soma de Riemann com $m = n = 4$ para estimar estimar $\iint_R (2x + x^2y)\,dA$. Tome os pontos amostra como os cantos inferiores esquerdo dos sub-retângulos.

5. É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

x \ y	0	1	2	3	4
1,0	2	0	−3	−6	−5
1,5	3	1	−4	−8	−6
2,0	4	3	0	−5	−8
2,5	5	5	3	−1	−4
3,0	7	8	6	3	0

(a) Estime $\iint_R f(x, y)\, dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.

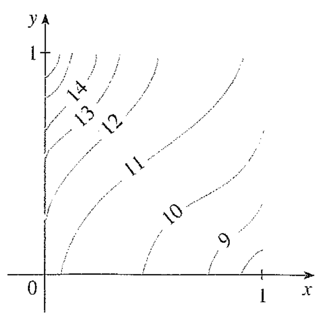
(b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$ escolhendo os pontos amostrais o mais longe da origem.

6. Uma piscina de 20 pés por 30 pés é enchida com água. A profundidade da piscina é medida a cada intervalo de 5 pés, começando de um canto, e os valores foram anotados na tabela. Estime o volume de água da piscina.

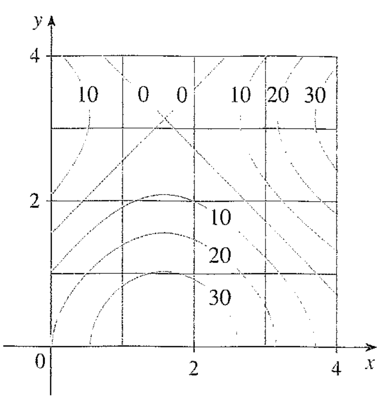
	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

7. Seja V o volume de um sólido contido entre o gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leqslant x \leqslant 4$, $2 \leqslant y \leqslant 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann computadas utilizando como ponto amostra o canto inferior esquerdo e o canto superior direito, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U, arranje-os na seqüência crescente de valores e explique suas razões.

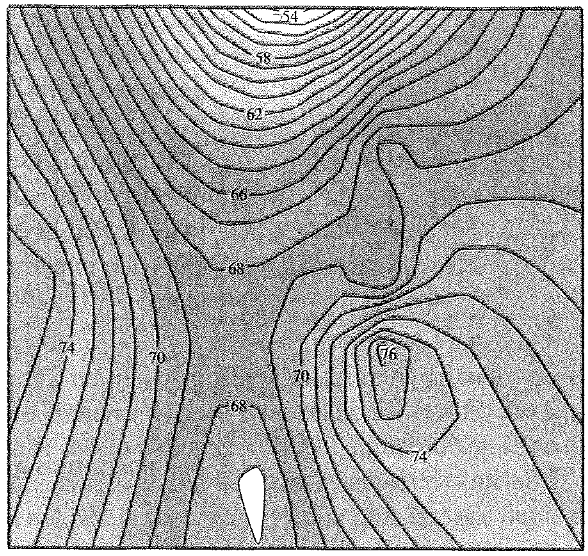
8. A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use-as para estimar $\iint_R f(x, y)\, dA$ com precisão nas unidades.



9. A figura mostra o mapa de contornos de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$. Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.



10. O mapa de contornos mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 3:00 horas da tarde do dia 1º de maio de 1996, no estado do Colorado. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.



11–13 □ Calcule a integral dupla identificando-a antes como o volume de um sólido.

11. $\iint_R 3\, dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 6\}$

12. $\iint_R (5 - x)\, dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y)\, dA$, $\quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. A integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$, onde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o desenho do sólido.

15. Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando soma de um CAS) para estimar

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dA$$

onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1024.

16. Repita o Exercício 15 para a integral $\iint_R \cos(x^4 + y^4)\, dA$.

17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$, e $R = [a, b] \times [c, d]$, mostre que

$$\iint_R k\, dA = k(b - a)(d - c)$$

18. Se $R = [0, 1] \times [0, 1]$, mostre que

$$0 \leqslant \iint_R \operatorname{sen}(x + y)\, dA \leqslant 1$$

já que $\int_a^b g(x)\,dx$ é constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais simples:

$$\iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 □ Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen} y\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

□ A função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R; assim a integral representa o volume do sólido contido entre o gráfico de f e R.

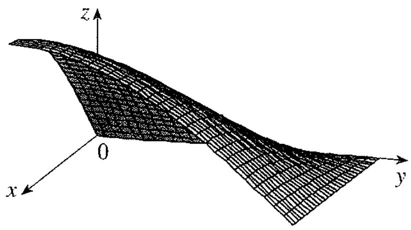


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 □ Determine $\int_0^3 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^4 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 2x + 3x^2y$

2. $f(x, y) = \dfrac{y}{x + 2}$

3–12 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\,dx\,dy$

4. $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y\,dy\,dx$

6. $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y})\,dx\,dy$

7. $\int_0^3 \int_0^1 \sqrt{x + y}\,dx\,dy$

8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x + y)\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2}\,dx\,dy$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\,dx\,dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\,dy\,dx$

13–20 □ Calcule a integral dupla.

13. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

14. $\iint_R xye^y\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

15. $\iint_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

16. $\iint_R \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

17. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

18. $\iint_R xe^{xy}\,dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

19. $\iint_R \dfrac{1}{x + y}\,dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

20. $\iint_R \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

21–22 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

21. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

22. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

23. Determine o volume do sólido que é limitado acima pelo plano $z = 2x + 5y + 1$ e abaixo pelo retângulo $\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 1 \leqslant y \leqslant 4\}$.

24. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide circular $z = x^2 + y^2$ e acima do retângulo $R = [-2, 2] \times [-3, 3]$.

25. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

26. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [1, 3]$.

27. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

28. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico, $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, pelos planos $x = 3$ e $y = 2$, e pelos planos coordenados.

29. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

30. (a) Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 6 - xy$ e pelos planos $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 3$ e $z = 0$.
(b) Use o computador para desenhar o sólido.

31. Utilize um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida utilize o CAS para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

32. Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2}\cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Utilize um sistema computacional algébrico para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

33-34 Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

33. $f(x, y) = x^2 y$, R tem vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

34. $f(x, y) = x \operatorname{sen} xy$, $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$

35. Utilize seu CAS para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Sua resposta contradiz o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

36. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?
(b) Se $f(x, y)$ é contínua em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas

Para integrais simples, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Mas, para integrais duplas, queremos ser capazes de integrar a função f não somente sobre retângulos, mas também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode ser cercada por uma região retangular R como na Figura 2. Definimos então uma nova função F com domínio R por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases} \tag{1}$$

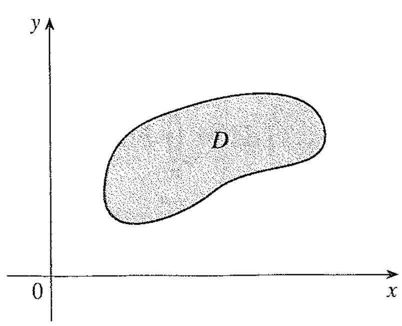


FIGURA 1

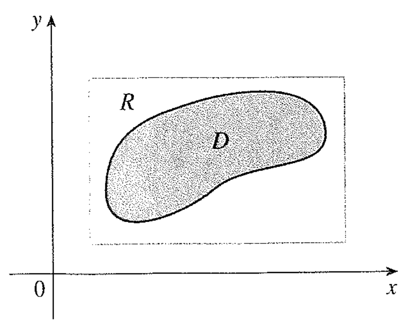


FIGURA 2

15.3 Exercícios

1–6 □ Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_1^2 \int_y^2 xy\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)\, dy\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–18 □ Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D x^3y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -x \leqslant y \leqslant x\}$

8. $\iint_D \dfrac{4y}{x^3 + 2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$

9. $\iint_D \dfrac{2y}{x^2 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

10. $\iint_D e^{y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$

11. $\iint_D e^{x/y}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2,\ y \leqslant x \leqslant y^3\}$

12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$

13. $\iint_D x \cos y\, dA$, D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

14. $\iint_D (x + y)\, dA$, D é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

15. $\iint_D y^3\, dA$,
D é a região triangular com vértices (0, 2), (1, 1) e (3, 2)

16. $\iint_D (y^2 - x)\, dA$, D é limitada por $x = y^2$, $x = 3 - 2y^2$

17. $\iint_D (2x - y)\, dA$,
D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2.

18. $\iint_D ye^x\, dA$,
D é a região triangular com vértices (0, 0), (2, 4) e (6, 0)

19–28 □ Determine o volume do sólido dado.

19. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$

20. Abaixo do parabolóide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$

21. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices em (1, 1), (4, 1) e (1, 2)

22. Limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 4$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$

23. Limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 2$ no primeiro octante

24. Limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

25. Limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$

26. Limitada pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ e $6x + 2y + 3z = 6$

27. Limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante.

28. Limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

29. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

30. Determine o volume aproximado do sólido no primeiro octante que é limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize o dispositivo gráfico para estimar os pontos de intersecção.)

31–32 □ Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

31. Abaixo da superfície $z = x^3y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

32. Entre os parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

33–38 □ Esboce a região de integração e faça a mudança da ordem de integração.

33. $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dy\, dx$

35. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

36. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy$

37. $\int_0^4 \int_{y/2}^2 f(x, y)\, dx\, dy$

38. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

39–44 □ Calcule a integral trocando a ordem de integração.

39. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$

40. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy$

41. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2)\, dx\, dy$

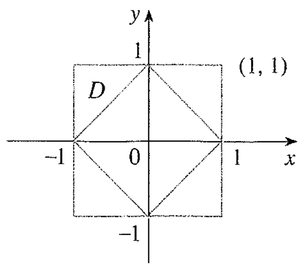
42. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{sen}(y^3)\, dy\, dx$

43. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

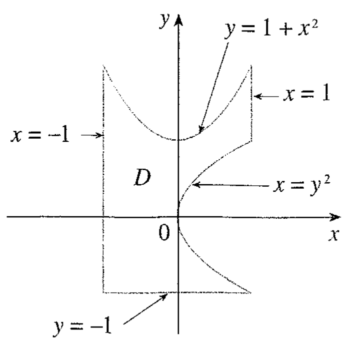
44. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

45–46 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

45. $\iint_D x^2\, dA$



46. $\iint_D xy\, dA$



47–48 Utilize a Propriedade 11 para estimar o valor da integral.

47. $\iint_D \sqrt{x^3 + y^3}\, dA, \quad D = [0, 1] \times [0, 1]$

48. $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA,$
D é o disco com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$

49. Prove a Propriedade 11.

50. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que se segue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

51. Calcule $\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4)\, dA$, onde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.
[*Dica:* Explore o fato de que D é simétrica com relação a ambos os eixos.]

52. Utilize a simetria para calcular $\iint_D (2 - 3x + 4y)\, dA$, onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

53. Calcule $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$, onde D é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, identificando primeiro a integral como o volume de um sólido.

54. Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu CAS para fazer esse desenho, para achar as equações das fronteiras da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

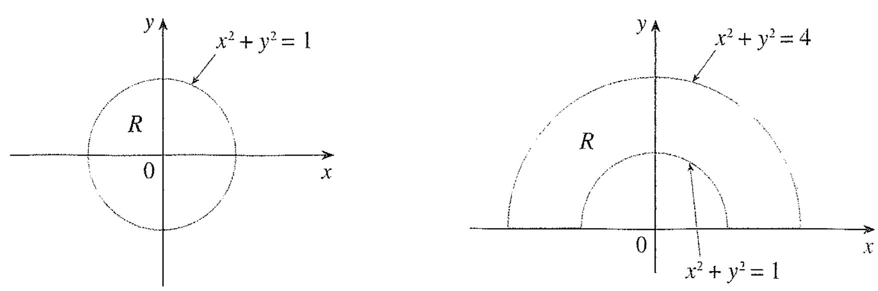
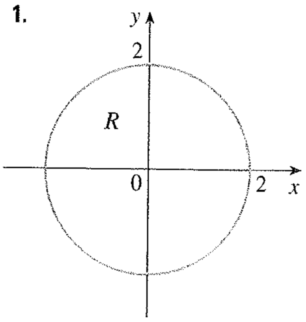
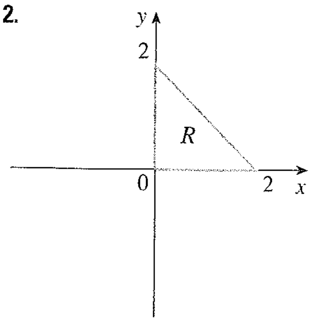


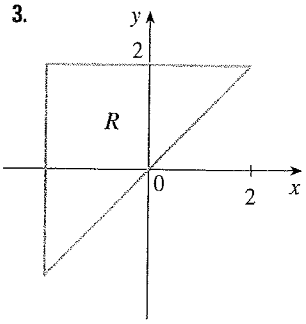
FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (a) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$

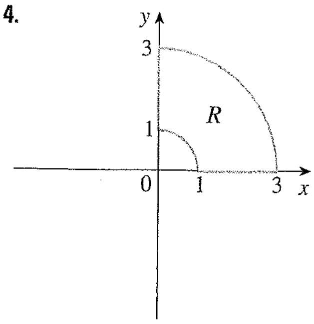
15.4 Exercícios

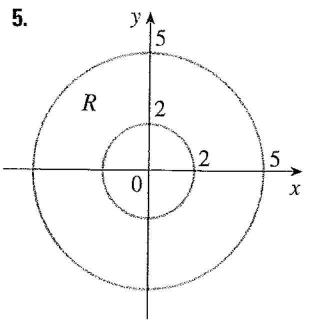
1–6 Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

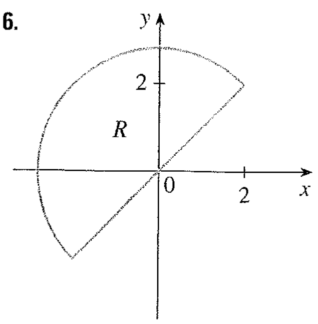
1.


2.


3.


4.


5.


6.


7–14 Calcule a integral dada colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_R x\, dA$, onde R é o disco com centro na origem e raio 5

8. $\iint_R y\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$ e pelas retas $y = x$ e $y = 0$

9. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$

10. $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante contida pelo círculo $x^2 + y^2 = 16$

13. $\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

14. $\iint_D x\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região contida pela cardióide $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

17. A região contida pela lemniscata $r^2 = 4 \cos 2\theta$

18. A região dentro do círculo $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ e fora do círculo $r = 2$

19–25 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

21. Uma esfera de raio a

22. Limitada pelo parabolóide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$

23. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

24. Limitada pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

25. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

26. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo no centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel restante.
(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Note que o volume depende somente de h, e não de r_1 ou r_2.

27–30 Calcule a integral iterada convertendo-a antes para coordenadas polares.

27. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dx\, dy$

29. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy$

30. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

31. Uma piscina circular tem 40 pés de diâmetro. Sua profundidade é constante na direção leste-oeste e aumenta linearmente de 2 pés no término sul para 7 pés no término norte. Determine o volume de água da piscina.

32. Um aspersor distribui água num círculo de raio de 100 pés. Ele fornece água até uma profundidade e^{-r} pés por hora numa distância de r pés do aspersor.

(a) Qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro de um círculo de raio R centrado no aspersor?

(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora e por pés quadrados fornecida para uma região circular de raio R.

33. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

34. (a) Definimos uma integral imprópria (sobre todo plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental para probabilidade e estatística.)

35. Utilize o resultado do Exercício 34, parte (c), para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

15.5 Aplicações das Integrais Duplas

Já vimos uma aplicação da integral dupla: cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, e isso será feito na próxima seção. Nesta seção vamos explorar aplicações físicas tais como no cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos ainda como essas idéias físicas são importantes quando aplicadas a funções de densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

Densidade e Massa

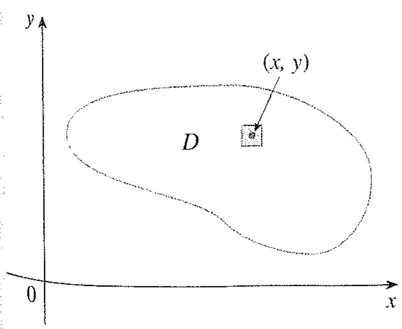


FIGURA 1

Na Seção 9.3 fomos capazes de calcular momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante usando integrais simples. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar lâminas com densidade variável. Suponha uma lâmina colocada numa região D do plano xy e cuja **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D. Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área do pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

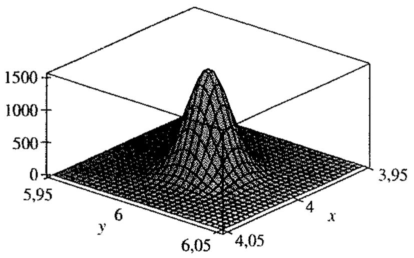


FIGURA 8

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{0{,}0002\pi} e^{-(x-4)^2/0{,}0002} e^{-(y-6)^2/0{,}0002}$$

$$= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 8.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de X e Y diferirem dos valores médios de menos que 0,02 cm. Utilizando uma calculadora ou computador para estimar a integral temos

$$P(3{,}98 < X < 4{,}02,\ 5{,}98 < Y < 6{,}02) = \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{5000}{\pi} \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx$$

$$\approx 0{,}91$$

Então a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0{,}91 = 0{,}09$$

□

15.5 Exercícios

1. Uma carga elétrica é distribuída sobre um retângulo $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = x^2 + 3y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.

2. Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco $x^2 + y^2 \leq 1$ de modo que a densidade de carga em (x, y) seja $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.

3–10 □ Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ.

3. $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x, y) = x^2$

4. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$; $\rho(x, y) = y$

5. D é uma região triangular com vértices (0, 0), (2, 1), (0, 3); $\rho(x, y) = x + y$

6. D é uma região triangular com vértices (0, 0), (1, 1), (4, 0); $\rho(x, y) = x$

7. D é uma região no primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 1$; $\rho(x, y) = xy$

8. D é limitada pela parábola $y = 9 - x^2$ e pelo eixo x; $\rho(x, y) = y$

9. D é limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$; $\rho(x, y) = 3$

10. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$; $\rho(x, y) = x$

11. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ do primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

12. Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

13. Determine o centro de massa da lâmina com formato de um triângulo reto isósceles com lados iguais de tamanho a se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa.

14. Uma lâmina ocupa a região circular $x^2 + y^2 = 2y$ mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Determine o centro de massa se a densidade for proporcional à distância do ponto à origem.

15. Determine os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 7.

16. Determine os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 12.

17. Determine os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 9.

18. Considere um ventilador quadrado de pás de comprimento 2 e considere o canto inferior esquerdo como a origem. Se a densidade das pás for $\rho(x, y) = 1 + 0{,}1x$, é mais difícil girar as pás em torno do eixo x ou do eixo y?

19–20 Utilize um sistema de manipulação algébrica para determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia da lâmina que ocupa a região D e tem a densidade dada.

19. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$; $\rho(x, y) = xy$

20. D é delimitada pela cardióide $r = 1 + \cos\theta$; $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

21. Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa um quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e $(0, a)$. Determine os momentos de inércia I_x e I_y e os raios de rotação $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{\bar{y}}$.

22. Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa a região abaixo da curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ até $x = \pi$. Determine os momentos de inércia I_x e I_y e raios de rotação $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{\bar{y}}$.

23. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

24. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.
(b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é f da parte (a), determine
(i) $P(X \geqslant \frac{1}{2})$ (ii) $P(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2})$
(c) Determine os valores esperados de X e Y.

25. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}1e^{-(0{,}5x+0{,}2y)} & \text{se } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(a) Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.
(b) Determine as seguintes probabilidades.
(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$
(c) Determine os valores esperados de X e Y.

26. (a) Uma lâmpada tem dois bulbos de um tipo com tempo de vida médio de 1000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha desses bulbos por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1000$, determine a probabilidade de que ambos os bulbos venham a falhar dentro de um período de 1000 horas.
(b) Outra lâmpada tem somente um bulbo do mesmo tipo dos da parte (a). Se um bulbo se queima e é trocado por outro do mesmo tipo, determine a probabilidade de que os dois bulbos venham a falhar dentro de 1000 horas.

27. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com X distribuída segundo uma normal com média 45 e desvio padrão 0,5 e Y distribuída segundo uma normal com média 20 e desvio padrão 0,1. Determine $P(40 \leqslant X \leqslant 50, 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.

28. Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam num café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y, onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. A funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que atrase. Yolanda sempre chega às 12:10 horas, e é mais provável que ela atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

29. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 mi na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto $A(x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância de P a A.
(a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estão uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por milha quadrada. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A.
(b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde você preferiria viver?

15.6 Área da Superfície

Na Seção 16.6 estaremos tratando de superfícies mais genéricas, chamadas superfícies paramétricas. Assim, você poderá pular esta seção se for cobrir a outra.

Nesta seção vamos aplicar a integral dupla ao problema de determinar a área de uma superfície. Na Seção 9.2 determinamos a área de alguns tipos especiais de superfícies – uma superfície de revolução – por métodos de cálculo de uma única variável. Calcularemos aqui a área de uma superfície cuja equação é dada por $z = f(x, y)$, o gráfico de uma função de duas variáveis.

Seja S a superfície com equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas.

15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1 integrando primeiro em relação a z, depois x e então y.

2. Calcule a integral $\iiint_E (x^2 + yz)\, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -3 \leqslant y \leqslant 0,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–6 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\, dy\, dx\, dz$

4. $\int_1^2 \int_0^x \int_0^{1-y} x^3y^2z\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dx\, dz\, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$

7–16 □ Calcule a integral tripla.

7. $\iiint_E 2x\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$

8. $\iiint_E yz \cos(x^5)\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \leqslant z \leqslant 2x\}$

9. $\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

10. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $3x + 2y + z = 6$

11. $\iiint_E xy\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$

12. $\iiint_E xz\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$

13. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$

14. $\iiint_E (x + 2y)\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e pelos planos $x = z$, $x = y$ e $z = 0$

15. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

16. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

17–20 □ Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

17. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 3y + 6z = 12$

18. O sólido limitado pelo cilindro elíptico $4x^2 + z^2 = 4$ e os planos $y = 0$ e $y = z + 2$

19. O sólido limitado pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $z = 0$ e $x + z = 1$

20. O sólido contido pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 18 - x^2 - y^2$

21. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortado do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.
(b) Utilize a Tabela de Integrais (na *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

22. (a) Na **Regra do Ponto Médio para Integrais Triplas** usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla sobre uma caixa B, onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk}. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B e^{-x^2-y^2-z^2}\, dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.
(b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão até duas casas decimais. Compare com a resposta da parte (a).

23–24 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

24. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

25–28 □ Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

25. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 6$

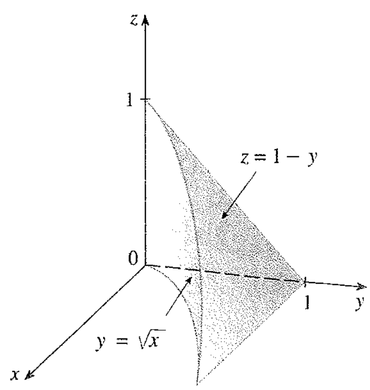
26. $z = 0$, $x = 0$, $y = 2$, $z = y - 2x$

27. $z = 0$, $z = y$, $x^2 = 1 - y$

28. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

29. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

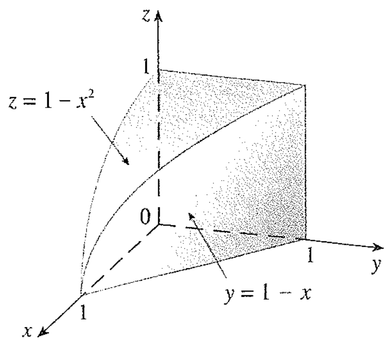


Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.

30. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.



31–32 Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

31. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

32. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

33–36 Determine a massa e centro de massa do sólido dado E com a função densidade dada ρ.

33. E é o sólido do Exercício 9; $\rho(x, y, z) = 2$

34. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

35. E é o cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

36. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

37–38 Estabeleça, mas não calcule, expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

37. O sólido do Exercício 15; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

38. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

39. Seja E um sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema computacional algébrico para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E.
(a) A massa.
(b) O centro de massa.
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z.

40. Se E é o sólido do Exercício 16 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três decimais.
(a) A massa.
(b) O centro de massa.
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z.

41. Determine os momentos de inércia para um cubo com densidade constante k e lados de comprimento L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

42. Determine os momentos de inércia do tijolo retangular de dimensões a, b e c, massa M e densidade constante se o centro do tijolo está na origem e suas arestas são paralelas aos eixos coordenados.

43. A função densidade conjunta de variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.
(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

44. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0{,}5x+0{,}2y+0{,}1z)}$ se $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.
(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

45–46 O **valor médio** de uma função $f(x, y, z)$ sobre uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E. Por exemplo, se ρ é a função densidade, então $\rho_{\text{méd}}$ é a densidade média de E.

45. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante com um vértice na origem e arestas pararelas ao eixos coordenados.

46. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

47. Determine a região E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.

15.8 Exercícios

1–4 ▫ Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$

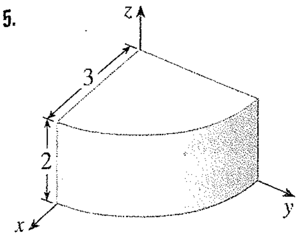
2. $\int_1^3 \int_0^{\pi/2} \int_r^3 r\,dz\,d\theta\,dr$

3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

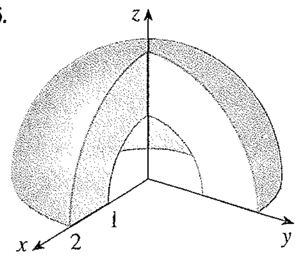
4. $\int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

5–6 ▫ Estabeleça a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

5.



6.



7–16 ▫ Utilize coordenadas cilíndricas.

7. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,dV$, onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

8. Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

9. Calcule $\iiint_E y\,dV$, onde E é o sólido que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.

10. Calcule $\iiint_E xz\,dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$, $z = y$, e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no semi-espaço $y \geqslant 0$.

11. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

12. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
    (b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

13. Determine o volume da região E limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

14. Determine o centróide da região E do Exercício 13.

15. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$ se S tem densidade constante K.

16. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância ao eixo z.

17–28 ▫ Utilize coordenadas esféricas.

17. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

18. Calcule $\iiint_H (x^2 + y^2)\,dV$, onde H é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está contido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

20. Calcule $\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$, onde E é o sólido que está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

21. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, onde E é limitado abaixo pelo cone $\phi = \pi/6$ e acima pela esfera $\rho = 2$.

22. Calcule $\iiint_E xyz\,dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

23. Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos \phi$.

24. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

25. Determine o centróide do sólido do Exercício 23.

26. Seja H um hemisfério de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
    (a) Determine a massa de H.
    (b) Determine o centro de massa de H.
    (c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

27. (a) Determine o centróide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.
    (b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação ao diâmetro de sua base.

28. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância à base.

29–32 ▫ Utilize coordenadas cilíndricas ou esféricas.

29. Determine o volume e o centróide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

30. Determine o volume da menor cunha esférica de uma esfera de raio a cortada por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

31. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize ou a Tabela de Integrais (veja a *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para calcular a integral.

32. (a) Determine o volume contido pelo toro $\rho = \text{sen}\,\phi$.
(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

33–34 □ Calcule a integral transformando para coordenadas cilíndricas.

33. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

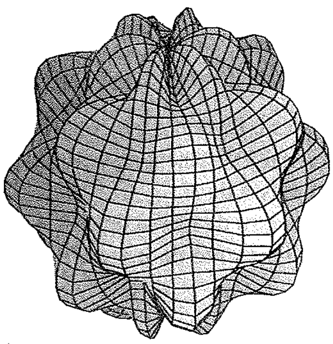
34. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\,dx\,dy$

35–36 □ Calcule a integral transformando para coordenadas esféricas.

35. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

36. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$

37. No Projeto de Laboratório do Capítulo 12 investigamos a família de superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,n\phi$ que foram usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



38. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio aumenta indefinidamente.)

39. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = \text{cotg}\,\phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da semicunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

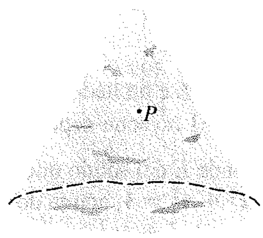
$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2\,\text{sen}\,\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

40. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho requerida para levantar uma montanha do nível do mar. Considere uma montanha que tem essencialmente o formato de um cone reto circular. Suponha que a densidade de peso do material na vizinhança de um ponto P é $g(P)$ e a altura é $h(P)$.
(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
(b) Assuma que o Monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 62.000 pés, altura de 12.400 pés e densidade constante de 200 lb/pé³. Quanto trabalho teria sido exercido para formar o Monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?



Projeto Aplicado — Corrida na Rampa

Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de *squash*), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolam em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará mais depressa em baixo? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão consideramos a bola ou o cilindro com massa m, raio r e momento de inércia I (em relação a seu eixo de rotação). Se a queda vertical é h, a energia potencial no topo é mgh. Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω, e assim $v = \omega r$.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Calculamos o jacobiano como se segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \left(-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta\right)$$

$$- \rho \operatorname{sen} \phi \left(\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta\right)$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Como $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, temos $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$. Portanto

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = \left|-\rho^2 \operatorname{sen} \phi\right| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

que equivale à Fórmula 15.8.4.

15.9 Exercícios

1–6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = u + 4v, \quad y = 3u - 2v$
2. $x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2$
3. $x = \dfrac{u}{u + v}, \quad y = \dfrac{v}{u - v}$
4. $x = \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad y = \alpha \cos \beta$
5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw$
6. $x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v}, \quad z = e^{u+v+w}$

7–10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$; $x = 2u + 3v,\ y = u - v$
8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $x = v,\ y = u(1 + v^2)$
9. S é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$; $x = u^2,\ y = v$
10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au,\ y = bv$

11–16 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. $\iint_R (3x + 4y)\, dA$, onde R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = x - 2$, $y = -2x$ e $y = 3 - 2x$; $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$
12. $\iint_R (x + y)\, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$ e $(3, -2)$; $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$
13. $\iint_R x^2\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$
14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$
15. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$

16. $\iint_R y^2\,dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.

17. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido contido pelo elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação os pólos foram achatados. Assim seu formato pode ser aproximado por um elipsóide com $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.

18. Calcule $\iiint_E x^2 y\,dV$, onde E é o sólido do Exercício 17(a).

19–23 □ Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

19. $\iint_R xy\,dA$, onde R é a região limitada pelas retas $2x - y = 1$, $2x - y = -3$, $3x + y = 1$ e $3x + y = -2$

20. $\displaystyle\iint_R \frac{x + 2y}{\cos(x - y)}\,dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0$ e $x + 2y = 2$

21. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$

22. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

23. $\iint_R e^{x+y}\,dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leqslant 1$

24. Seja f uma função contínua sobre $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y)\,dA = \int_0^1 u f(u)\,du$$

15 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Suponha que f é uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

(a) Escreva uma expressão para a soma dupla de Riemann de f. Se $f(x, y) \geqslant 0$, o que essa soma representa?

(b) Escreva a definição de $\iint_R f(x, y)\,dA$ como um limite.

(c) Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y)\,dA$ se $f(x, y) \geqslant 0$? E se f tem valores positivos e valores negativos?

(d) Como calcular $\iint_R f(x, y)\,dA$?

(e) O que a Regra do Ponto Médio para integrais duplas diz?

(f) Escreva uma expressão para o valor médio de f.

2. (a) Como você define $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?

(b) O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região do tipo I?

(c) O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região do tipo II?

(d) Quais as propriedades de uma integral dupla?

3. Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral em coordenadas polares? Por que você faria isso?

4. Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.

(a) A massa.

(b) Os momentos em relação aos eixos.

(c) O centro de massa.

(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem.

5. Seja f um função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y.

(a) Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d.

(b) Que propriedades f possui?

(c) Quais são os valores esperados de X e Y?

6. Escreva uma expressão para a área de uma superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

7. (a) Escreva a definição da integral tripla sobre uma caixa retangular B.

(b) Como calcular $\displaystyle\iiint_B f(x, y, z)\,dV$?

(c) Como definir $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?

(d) O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?

(e) O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?

(f) O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?

8. Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.

(a) A massa.

(b) Os momentos em relação aos planos coordenados.
(c) As coordenadas do centro de massa.
(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos.

9. (a) Como, numa integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para cilíndricas?
(b) Como, numa integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?
(c) Em que situações você deve trocar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?

10. (a) Se uma transformação T é dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, qual é o jacobiano de T?
(b) Como você muda de variáveis em uma integral dupla?
(c) Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações. Se verdadeiras, explique por quê. Se falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo.

1. $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x-y)\,dx\,dy = \int_{0}^{6}\int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x-y)\,dy\,dx$

2. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\,dx\,dy = 0$

3. Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, então

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA = \frac{16\pi}{3}$$

4. $\int_{1}^{4}\int_{0}^{1} (x^2 + \sqrt{y}) \operatorname{sen}(x^2y^2)\,dx\,dy \leqslant 9$

5. 5. A integral

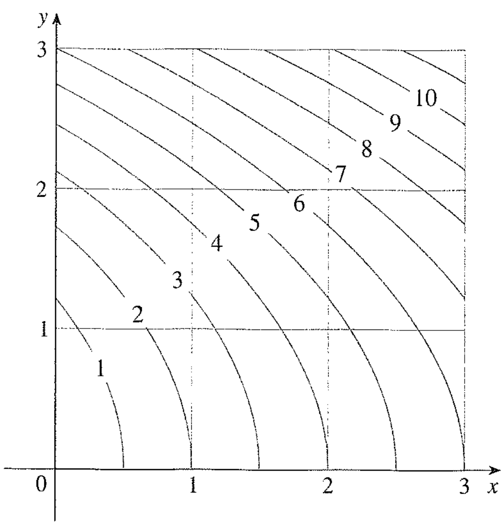
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 dz\,dr\,d\theta$$

representa um volume contido pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

6. A integral $\iiint_E kr^3\,dz\,dr\,d\theta$ representa o momento de inércia em torno do eixo z de um sólido E com densidade constante k.

EXERCÍCIOS

1. A figura mostra um mapa de contornos de uma função f sobre o quadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Utilize a soma de Riemann com nove termos para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\,dA$. Tome os pontos amostra como sendo o canto superior direito dos quadrados.



2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.

3–8 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^2\int_0^2 (y + 2xe^y)\,dx\,dy$

4. $\int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy$

5. $\int_0^1\int_0^x \cos(x^2)\,dy\,dx$

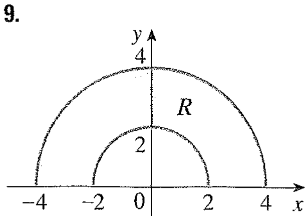
6. $\int_0^1\int_x^{e^x} 3xy^2\,dy\,dx$

7. $\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\,dz\,dy\,dx$

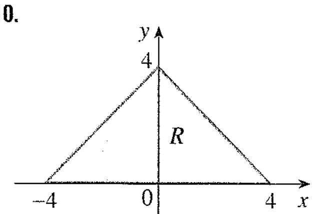
8. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\int_0^y xy\,dz\,dx\,dy$

9–10 □ Escreva $\iint_R f(x, y)\,dA$ como uma integral iterada, onde R é a região mostrada e f é uma função arbitrária, contínua em R.

9.



10.



11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_0^{\pi}\int_1^{1+\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_1^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

e calcule essa integral.

13–14 □ Calcule a integral iterada primeiro invertendo a ordem de integração.

13. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$ **14.** $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \operatorname{sen}(x^2)\, dx\, dy$

15–28 □ Calcule o valor da integral múltipla.

15. $\iint_R \frac{1}{(x-y)^2}\, dA$, onde
$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 2 \leqslant y \leqslant 4\}$

16. $\iint_D x^3\, dA$, onde
$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x + 1\}$

17. $\iint_D xy\, dA$, onde D é limitada por $y^2 = x^3$ e $y = x$

18. $\iint_D xe^y\, dA$, onde D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

19. $\iint_D (xy + 2x + 3y)\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada por $x = 1 - y^2$, $y = 0$, $x = 0$

20. $\iint_D y\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$

21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$

22. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, onde D é o disco fechado de raio 1 e centro $(0, 1)$

23. $\iiint_E x^2 z\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant x\}$

24. $\iiint_T y\, dV$, onde T é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + y + z = 2$

25. $\iiint_E y^2 z^2\, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$

26. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante

27. $\iiint_E yz\, dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

28. $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29–34 □ Determine o volume do sólido dado.

29. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

30. Abaixo da superfície $z = x^2 y$ e acima do triângulo do plano xy com vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$

31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$

32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$

33. Da cunha obtida pelo corte do cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ pelos planos $z = 0$ e $z = mx$

34. Acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com função densidade $\rho(x, y) = y$.
(a) Determine a massa da lâmina.
(b) Determine o centro de massa.
(c) Determine os momentos de inércia e raio de rotação em relação aos eixos x e y.

36. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ que está no primeiro quadrante.
(a) Determine o centróide da lâmina.
(b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for $\rho(x, y) = xy^2$.

37. (a) Determine o centróide de um cone circular reto com altura h e raio da base a. (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z.)
(b) Determine o momento de inércia do cone em relação a seu eixo (eixo z).

38. Determine a área da parte do cone $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

39. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.

40. Trace o gráfico da superfície $z = x \operatorname{sen} y$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$, e determine sua área com precisão até a quarta casa decimal.

41. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

42. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dz\, dy\, dx$$

43. Se D é uma região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = e^x$, determine o valor aproximado da integral $\iint_D y^2\, dA$. (Utilize um dispositivo gráfico para estimar os pontos de intersecção das curvas.)

44. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ e função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

45. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Determine $P(X \leqslant 2, Y \geqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

46. Uma lâmpada tem três bulbos, cada um de um tipo com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha dos bulbos por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade de todos os três bulbos virem a falhar dentro de um intervalo de 1000 horas.

47. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

como uma integral iterada na ordem $dx\, dy\, dz$.

48. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

49. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para calcular $\iint_R (x - y)/(x + y)\, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$.

50. Utilize a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

51. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e a transformação apropriada para calcular $\iint_R xy\, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(1, -1)$.

52. O **Teorema do Valor Médio para Integrais Duplas** diz que se f é uma função contínua num região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto (x_0, y_0) em D tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) A(D)$$

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para provar esse teorema. (Utilize a prova da versão unidimensional da Seção 6.5 do Volume I como guia.)

53. Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b). Seja D_r um disco fechado com centro em (a, b) e raio r. Utilize o Teorema do Valor Médio para integrais duplas (veja o Exercício 52) para mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

54. (a) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}\, dA$, onde n é um inteiro e D é a região limitada por círculos com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.
(b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando $r \to 0^+$?
(c) Determine $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dV$, onde E é a região limitada pelas esferas com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.
(d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando $r \to 0^+$?