Exercício 6f da Lista 1:

Dado $a > 0$, calcule o volume do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

`Solução 1`: O volume pedido, que chamaremos de V, é igual oito vezes o volume da região abaixo do gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{a^2 - y^2}$ e acima do domínio

$$D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0, y \geq 0\},$$

isto é,

$$V = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - y^2}\, dA.$$

Usando coordenadas polares, temos

$$\iint_D \sqrt{a^2 - y^2}\, dA = \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^a (a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2} r\, dr\, d\theta.$$

Para cada θ diferente de zero no intervalo de integração, isto é, para cada θ satisfazendo $0 < \theta \leq \pi/2$, temos

$$\int_0^a (a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2} r\, dr = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \int_0^{a \sin\theta} (a^2 - s^2)^{1/2} s\, ds = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\, \frac{(a^2 - s^2)^{3/2}}{-3}\Big|_0^{a \sin\theta} = \frac{a^3(1 - \cos^3\theta)}{3 \operatorname{sen}^2\theta}$$

(na primeira passagem, fizemos a mudança $s = r \operatorname{sen}\theta$; é preciso supor $\theta > 0$ para poder dividir por $\operatorname{sen}\theta$). Daí:

(1) $$\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^a (a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2} r\, dr\, d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos^3\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta.$$

Calculemos agora a integral indefinida:

$$\int \frac{1 - \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta - \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta =$$

$$-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \cdot \cos\theta\, d\theta = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + C = \operatorname{sen}\theta + \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + C.$$

Para calcular a integral definida do segundo membro de (1), devemos observar que tanto o integrando quanto a primitiva que encontramos não estão definidos para $\theta = 0$, mas ambos têm limites finitos quando $\theta \to 0$. Daí:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos^3\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \operatorname{sen}(\pi/2) + \frac{1 - \cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)} - \lim_{\theta\to 0}\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = 2 + \lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2$$

(esse último limite se calcula pela regra de l'Hôpital).

Substituindo de volta, obtemos $V = \frac{16}{3} a^3$.

`Solução 2`: Calculemos o volume do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$ (claro que isso é igual ao volume pedido, pois só trocamos os nomes das variáveis). A projeção desse sólido no plano xy é igual ao quadrado delimitado pelas retas $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ e $y = -1$. O volume pedido, V, é igual a dezesseis vezes o volume abaixo do gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e acima do domínio $\tilde{D} = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x\}$,

$$V = 16 \int_0^a\!\!\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx = 16 \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -8 \cdot \frac{2}{3}\, (a^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3.$$