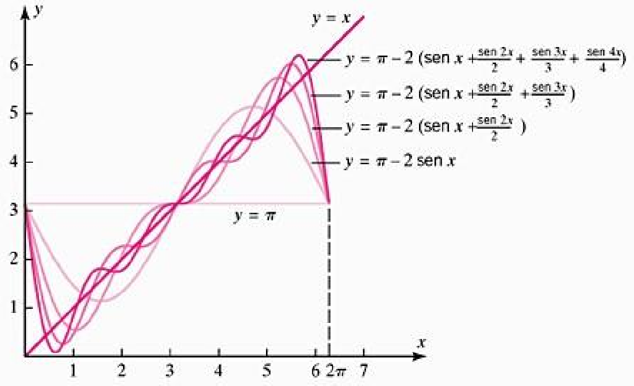


Figura 9.4.4

É natural esperar que o erro quadrático médio vá diminuir à medida que aumentar o número de termos na aproximação de mínimos quadrados

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Pode ser provado que para funções f em $C\,[0, 2\pi]$, o erro quadrático médio tende a zero quando $n \to \infty$, o que é denotado por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

O lado direito desta equação é chamada a ***série de Fourier*** de f sobre o intervalo $[0, 2\pi]$. Tais séries são de extrema importância nas Engenharias, nas Ciências e na Matemática. ♦

Conjunto de Exercícios 9.4

1. Encontre a aproximação de mínimos quadrados de $f(x) = 1 + x$ sobre o intervalo $[0, 2\pi]$ usando
   (a) um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor
   (b) um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor
2. Encontre a aproximação de mínimos quadrados de $f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[0, 2\pi]$ usando
   (a) um polinômio trigonométrico de ordem 3 ou menor
   (b) um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor
3. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de x sobre o intervalo $[0, 1]$ por uma função da forma $a + be^x$.
   (b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
4. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de e^x sobre o intervalo $[0, 1]$ por um polinômio da forma $a_0 + a_1x$.
   (b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
5. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de sen πx sobre o intervalo $[-1, 1]$ por um polinômio da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$.
   (b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
6. Use o processo de Gram-Schmidt para obter a base ortonormal (5) a partir da base (3).
7. Efetue as integrações em (9a), (9b) e (9c).
8. Encontre a série de Fourier de $f(x) = \pi - x$ sobre o intervalo $[0, 2\pi]$.

9.5 FORMAS QUADRÁTICAS

Nesta seção nós iremos estudar funções cujos termos são quadrados de variáveis ou produtos de duas variáveis. Estas funções surgem em uma variedade de aplicações como vibrações de sistemas mecânicos, bem como na Geometria, Estatística e Engenharia Elétrica.

Formas Quadráticas Até aqui nós estivemos especialmente interessados em equações lineares, ou seja, em equações da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

A expressão no lado esquerdo desta equação, a saber,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

é uma função de n variáveis, chamada ***forma linear***. Numa forma linear, todas as variáveis aparecem na primeira potência e não há produtos de variáveis na expressão. Aqui nós estudaremos ***formas quadráticas***, que são funções da forma

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 + \begin{pmatrix}\text{todos os termos possíveis}\\ \text{do tipo } a_kx_ix_j \text{ para } i < j\end{pmatrix} \tag{1}$$

Por exemplo, uma forma quadrática nas variáveis x_1 e x_2 é

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 \tag{2}$$

e uma forma quadrática nas variáveis x_1, x_2 e x_3 é

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 \tag{3}$$

Um termo de uma forma quadrática que envolve um produto de variáveis diferentes é chamado ***termo com produto misto*** ou, às vezes, ***termo cruzado***. Assim, o último termo em (2) é um termo com produto misto e os últimos três termos em (3) são termos com produto misto.

Se nós usarmos a convenção de omitir os colchetes em matrizes 1×1, podemos escrever (2) em forma matricial como

$$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

e (3) como

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} a_1 & a_4/2 & a_5/2 \\ a_4/2 & a_2 & a_6/2 \\ a_5/2 & a_6/2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(verifique isto, efetuando os produtos). Observe que os produtos em (4) e (5) são ambos da forma $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é o vetor-coluna das variáveis e A é uma matriz simétrica cujas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos com quadrado e cujas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos com produto misto. Mais precisamente, a entrada na diagonal na linha i e na coluna i é o coeficiente de x_i^2 e a entrada fora da diagonal, na linha i e na coluna j, é a metade do coeficiente do produto $x_i x_j$. Aqui estão alguns exemplos.

EXEMPLO 1 Representação Matricial de Formas Quadráticas

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$4x^2 - 5y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$xy = [x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

♦

As matrizes simétricas são úteis, mas não essenciais, para representar formas quadráticas. Por exemplo, a forma quadrática $2x^2 + 6xy - 7y^2$, que nós representamos por $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ no Exemplo 1 com uma matriz simétrica A, também pode ser escrita como

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde o coeficiente 6 do termo com produto misto foi repartido em 5 + 1 em vez de 3 + 3, como ocorre na representação simétrica. No entanto, as matrizes simétricas são, em geral, mais convenientes de usar, de modo que deve ser entendido que A é sempre simétrica quando escrevemos uma forma quadrática como $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, mesmo se isto não for explicitamente dito. Quando for conveniente, nós podemos usar a Fórmula (7) da Seção 4.1 para expressar uma forma quadrática em termos do produto interno euclidiano como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \text{ ou, por simetria do produto interno, } \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$$

Se preferirmos, poderemos usar a notação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para o produto interno e escrever estas expressões como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(A\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \tag{6}$$

Problemas Envolvendo Formas Quadráticas O estudo das formas quadráticas é um tópico extenso que somente poderá ser tocado nesta seção. Os seguintes são alguns dos problemas matemáticos importantes relacionados com formas quadráticas.

- Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ se $\mathbf{x}$ for restrito ao vínculo
$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$
- Quais condições deve satisfazer A para que a forma quadrática satisfaça a desigualdade $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?
- Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma forma quadrática em duas ou três variáveis e c é uma constante, como é o gráfico da equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = c$?
- Se P é uma matriz ortogonal, a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ converte a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ em $(P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y}$. Mas $P^T AP$ é uma matriz simétrica se A for simétrica (verifique), de modo que $\mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y}$ é uma nova forma quadrática nas variáveis de $\mathbf{y}$. É importante saber se podemos escolher P de tal modo que esta nova forma quadrática não tenha termos com produto misto.

Nesta seção nós vamos estudar os primeiros dois problemas e, na próxima, os dois últimos. O seguinte teorema fornece uma solução para o primeiro problema. A prova é adiada para o final desta seção.

Teorema 9.5.1

Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica cujos autovalores em ordem decrescente de tamanho são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Se $\mathbf{x}$ for restrito a $\|\mathbf{x}\| = 1$ relativamente ao produto interno euclidiano de R^n, então:

(*a*) $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq \lambda_n$.

(*b*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_n$ *se* $\mathbf{x}$ *é um autovetor de* A *associado a* λ_n *e* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_1$ *se* $\mathbf{x}$ *é um autovetor de* A *associado a* λ_1.

Segue deste teorema que, sujeita ao vínculo

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$

a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem um valor máximo de λ_1 (o maior autovalor) e um valor mínimo de λ_n (o menor autovalor).

EXEMPLO 2 Conseqüências do Teorema 9.5.1

Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

restrita ao vínculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$, e determine os valores de x_1 e x_2 nos quais o máximo e mínimo ocorrem.

Solução.

A forma quadrática pode ser escrita como

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$, que são os valores máximo e mínimo, respectivamente, da forma quadrática restrita ao vínculo. Para encontrar os valores de x_1 e x_2 nos quais estes valores extremos ocorrem, nós devemos encontrar autovetores associados a estes autovalores e depois normalizar estes autovetores para que satisfaçam $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Nós deixamos para o leitor mostrar que

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1: \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são bases dos auto-espaços. Normalizando estes vetores, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim, sujeita ao vínculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$, o valor máximo da forma quadrática é $\lambda = 3$, que ocorre se $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$; e o valor mínimo da forma quadrática é $\lambda = -1$, que ocorre se $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$. Além disto, obteremos bases alternativas para os auto-espaços se multiplicarmos os vetores acima por -1. Assim, o valor máximo $\lambda = 3$ também ocorre se $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$, e o valor mínimo $\lambda = -1$ também ocorre se $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$. ♦

Definição

Uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é chamada ***positiva*** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e uma matriz simétrica A é chamada ***positiva*** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma forma quadrática positiva.

O seguinte teorema é o principal resultado sobre matrizes positivas.

Teorema 9.5.2

Uma matriz simétrica A é positiva se, e somente se, todos os autovalores de A são positivos.

Prova. Suponha que A é positiva e seja λ um autovalor qualquer de A. Se $\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ, então $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, portanto

$$0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 \tag{7}$$

onde $\|\mathbf{x}\|$ é a norma euclidiana de $\mathbf{x}$. Como $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$, segue que $\lambda > 0$, que é o que queríamos mostrar.

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores de A são positivos. Nós devemos mostrar que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Mas se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, nós podemos normalizar $\mathbf{x}$ e obter o vetor $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|$ com a propriedade $\|\mathbf{y}\| = 1$. Agora, pelo Teorema 9.5.1, segue que

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} \geq \lambda_n > 0$$

onde λ_n é o menor autovalor de A. Assim,

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)^T A \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

Multiplicando todas as expressões por $\|\mathbf{x}\|^2$, obtemos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

que é o que queríamos mostrar. ■

EXEMPLO 3 Mostrando que uma Matriz é Positiva

No Exemplo 1 da Seção 7.3 nós mostramos que a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda = 2$ e $\lambda = 8$. Como estes são positivos, a matriz A é positiva e, para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ temos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0$$ ♦

Nosso próximo objetivo é obter um critério que possa ser utilizado para determinar se uma matriz simétrica é positiva sem precisar encontrar seus autovalores. Para alcançar isto, é útil introduzir um pouco de terminologia adicional. Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada, então as ***submatrizes principais*** de A são as submatrizes formadas pelas primeiras r linhas e r colunas de A, para $r = 1, 2, \ldots, n$. Estas submatrizes são

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots, \quad A_n = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 9.5.3

Uma matriz simétrica A é positiva se, e somente se, o determinante de cada submatriz principal é positivo.

Nós omitimos a prova.

EXEMPLO 4 Trabalhando com Submatrizes Principais

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

é positiva pois

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

todos os quais são positivos. Assim, nós também sabemos que todos os autovalores de A são positivos e que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ♦

OBSERVAÇÃO. Uma matriz simétrica A e a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ são chamadas

não-negativa	se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ para qualquer $\mathbf{x}$
negativa	se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
não-positiva	se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ para qualquer $\mathbf{x}$
indefinida	se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ toma ambos valores positivos e negativos

O Teorema 9.5.2 pode ser modificado de maneira óbvia para aplicar a matrizes destes quatro tipos. Assim, uma matriz simétrica A é não-negativa (negativa, não-positiva) se, e somente se, todos seus autovalores são *não-negativos* (negativos, não-positivos) e é indefinida se, e somente se, existem autovalores positivos *e* negativos. Por outro lado, a extensão do Teorema 9.5.3 a estes quatro casos é mais sutil; por exemplo, uma matriz simétrica A é não-negativa se, e somente se, *todos* os determinantes menores (e não só os principais) são não-negativos.

Opcional

Prova do Teorema 9.5.1a. Como A é simétrica, segue do Teorema 7.3.1 que existe uma base ortonormal de R^n consistindo de autovetores de A. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma tal base, onde $\mathbf{v}_i$ é o autovetor associado ao autovalor λ_i. Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ denota o produto interno euclidiano, então segue pelo Teorema 6.3.1 que, para qualquer $\mathbf{x}$ em R^n,

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Assim,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle A\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle A\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle A\mathbf{v}_n \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \lambda_n \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Segue que os vetores de coordenadas de $\mathbf{x}$ e de $A\mathbf{x}$ em relação à base S são

$$\begin{aligned} (\mathbf{x})_S &= (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle) \\ (A\mathbf{x})_S &= (\lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle) \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 6.3.2*c* e lembrando que $\|\mathbf{x}\| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = 1 \\ \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \end{aligned}$$

Usando estas duas equações e a Fórmula (6), nós podemos provar que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq \lambda_1$ como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \\ &\leq \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \\ &= \lambda_1 (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2) \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

A prova da desigualdade $\lambda_n \leq \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é similar e deixada como exercício.

Prova do Teorema 9.5.1b. Se $\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ_1 e $\|\mathbf{x}\| = 1$, então

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{x} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$$

Analogamente, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_n$ se $\|\mathbf{x}\| = 1$ e $\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ_n. ■

Conjunto de Exercícios 9.5

1. Quais das seguintes são formas quadráticas?

(a) $x^2 - \sqrt{2}xy$ (b) $5x_1^2 - 2x_2^3 + 4x_1x_2$ (c) $4x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 5x_1x_3$

(d) $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ (e) $x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2x_3$ (f) $x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2$

(g) $(x_1 - 3x_2)^2$ (h) $(x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 + 4x_2)^2$

2. Expresse as seguintes formas quadráticas na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz simétrica.

(a) $3x_1^2 + 7x_2^2$ (b) $4x_1^2 - 9x_2^2 - 6x_1x_2$ (c) $5x_1^2 + 5x_1x_2$ (d) $-7x_1x_2$

3. Expresse as seguintes formas quadráticas na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz simétrica.

(a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$ (b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ (d) $\sqrt{2}x_1^2 - \sqrt{3}x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 - 8\sqrt{3}x_1x_3$

(e) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_4 + 4x_3x_4$

4. Em cada parte, encontre uma expressão para a forma quadrática que não envolve matrizes.

(a) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (b) $[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 7 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (c) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(d) $[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (e) $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática sujeita ao vínculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ e determine os valores de x_1 e x_2

nos quais ocorrem os máximos e mínimos.

(a) $5x_1^2 - x_2^2$ (b) $7x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$ (c) $5x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$ (d) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$

6. Em cada parte, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática sujeita ao vínculo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ e determine os valores de x_1, x_2 e x_3 nos quais ocorrem os máximos e mínimos.

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ (b) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$

(c) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$

7. Use o Teorema 9.5.2 para determinar quais das seguintes matrizes são positivas.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

8. Use o Teorema 9.5.3 para determinar quais das matrizes do Exercício 7 são positivas.

9. Use o Teorema 9.5.2 para determinar quais das seguintes matrizes são positivas.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

10. Use o Teorema 9.5.3 para determinar quais das matrizes do Exercício 9 são positivas.

11. Em cada parte, classifique a forma quadrática como positiva, não-negativa, negativa, não-positiva ou indefinida.

(a) $x_1^2 + x_2^2$ (b) $-x_1^2 - 3x_2^2$ (c) $(x_1 - x_2)^2$

(d) $-(x_1 - x_2)^2$ (e) $x_1^2 - x_2^2$ (f) x_1x_2

12. Em cada parte, classifique a matriz como positiva, não-negativa, negativa, não-positiva ou indefinida.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Seja $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ uma forma quadrática em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e defina $T: R^n \to R$ por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

(a) Mostre que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + 2\,\mathbf{x}^T A\mathbf{y} + T(\mathbf{y})$.

(b) Mostre que $T(k\mathbf{x}) = k^2\, T(\mathbf{x})$.

(c) Será T uma transformação linear? Explique.

14. Em cada parte, encontre todos os valores de k para os quais a forma quadrática é positiva.

(a) $x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$ (b) $5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(c) $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

15. Expresse a forma quadrática $(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)^2$ na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz simétrica.

16. Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Em Estatística, a quantidade

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

é chamada a ***média amostral*** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e

$$s_{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

é chamada a ***variância amostral***.

(a) Expresse a forma quadrática $s_{\mathbf{x}}^2$ na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz simétrica.

(b) Será $s_{\mathbf{x}}^2$ uma forma quadrática positiva? Explique.

17. Complete a prova do Teorema 9.5.1 mostrando que $\lambda_n \le \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ se $\|\mathbf{x}\| = 1$ e $\lambda_n = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ se $\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ_n.

9.6 DIAGONALIZAÇÃO DE FORMAS QUADRÁTICAS; SEÇÕES CÔNICAS

Nesta seção nós iremos mostrar como remover o termo com produto misto de uma forma quadrática com uma mudança de variáveis e veremos como usar nossos resultados no estudo de gráficos de seções cônicas.

Diagonalização de Formas Quadráticas Seja

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

uma forma quadrática, onde A é uma matriz simétrica. Nós sabemos pelo Teorema 7.3.1 que existe uma matriz ortogonal P que diagonaliza A, ou seja,

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A. Denotando

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são as novas variáveis, e fazendo a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ em (1), obtemos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

onde

$$\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

é uma forma quadrática sem termos com produto misto.

Resumindo, obtivemos o seguinte resultado.

Teorema 9.6.1

Seja $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ uma forma quadrática nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde A é simétrica. Se P diagonaliza A ortogonalmente e se as novas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são definidas pela equação $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ então, substituindo esta equação em $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, obtemos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A e

$$D = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dizemos que a matriz P neste teorema ***diagonaliza ortogonalmente*** a forma quadrática ou que ***reduz a forma quadrática a uma soma de quadrados***.

EXEMPLO 1 Reduzindo uma Forma Quadrática a uma Soma de Quadrados

Encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ a uma soma de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.

Solução.

A forma quadrática pode ser escrita como

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A equação característica da matriz 3×3 é

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

de modo que os autovalores são $\lambda = 0$, $\lambda = -3$, $\lambda = 3$. Nós deixamos para o leitor mostrar que

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3: \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

são bases ortonormais para os três auto-espaços. Assim, a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos com produto misto é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{1}{3}y_2 - \tfrac{2}{3}y_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ x_3 &= \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

A nova forma quadrática é

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$-3y_2^2 + 3y_3^2$$

♦

OBSERVAÇÃO. Existem outros métodos para eliminar os termos com produto misto de uma forma quadrática, que nós não discutiremos aqui. Dois destes métodos, a ***redução de Lagrange*** e a ***redução de Kronecker***, são discutidos em textos mais avançados.

Seções Cônicas Agora nós iremos aplicar nosso trabalho ao estudo de equações da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (2)$$

onde $a, b, \ldots, f$ são números reais e pelo menos um dentre a, b e c é não-nulo. Uma equação deste tipo é chamada uma ***equação quadrática em x e y*** e

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

é chamada a ***forma quadrática associada***.

EXEMPLO 2 Os Coeficientes de uma Forma Quadrática

Na equação quadrática

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

os termos constantes de (2) são

$$a = 3, \quad b = \tfrac{5}{2}, \quad c = -7, \quad d = 2, \quad e = 0, \quad f = 7$$ ♦

EXEMPLO 3 Exemplos de Formas Quadráticas Associadas

Equação Quadrática	Forma Quadrática Associada
$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$	$3x^2 + 5xy - 7y^2$
$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$	$4x^2 - 5y^2$
$xy + y = 0$	xy

Os gráficos de equações quadráticas em x e y são chamadas ***cônicas*** ou ***seções cônicas***. As cônicas mais importantes são as elipses, os círculos, as hipérboles e as parábolas, que são chamadas cônicas ***não-degeneradas***. As demais cônicas são chamadas ***degeneradas*** e incluem pontos isolados e pares de retas (veja o Exercício 15).

Dizemos que uma cônica não-degenerada está em ***posição padrão*** em relação aos eixos coordenados se sua equação pode ser expressa em uma das formas dadas na Figura 9.6.1.

EXEMPLO 4 Três Cônicas

Pela Figura 9.6.1, a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

é a de uma elipse com $k = 2$ e $l = 3$. Assim, esta elipse está em posição padrão, intersectando o eixo x em $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e o eixo y em $(0, -3)$ e $(0, 3)$.

A equação $x^2 - 8y^2 = -16$ pode ser reescrita como $y^2 / 2 - x^2 / 16 = 1$, que é da forma $y^2 / k^2 - x^2 / l^2 = 1$ com $k = \sqrt{2}$, e $l = 4$. Seu gráfico, portanto, é uma hipérbole na posição padrão cortando o eixo y em $(0, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$.

A equação $5x^2 + 2y = 0$ pode ser reescrita como $x^2 = -\frac{2}{5}y$, que é da forma $x^2 = ky$ com $k = -\frac{2}{5}$. Como $k < 0$, seu gráfico é uma parábola na posição padrão abrindo para baixo. ♦

O Significado do Termo com Produto Misto

Observe que nenhuma cônica em posição padrão tem um termo em xy (ou seja, um termo com produto misto) em sua equação; a presença de um termo xy na equação de uma cônica não-degenerada indica que a cônica está girada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2*a*). Também nenhuma cônica em posição padrão tem ambos os termos em x^2 e x ou ambos os termos em y^2 e y. Se não há termo com produto misto, a ocorrência de qualquer um destes dois pares na equação de uma cônica não-degenerada indica que a cônica está transladada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2*b*). A ocorrência de qualquer um destes pares e de um termo com produto misto indica que a cônica está tanto rodada quanto transladada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2*c*).

Uma técnica para identificar o gráfico de uma cônica não-degenerada que não está em posição padrão consiste em rodar e transladar os eixos coordenados xy para obter um sistema de coordenadas $x'y'$ em relação ao qual a cônica está em posição padrão. Uma vez feito isto, a equação da cônica no sistema $x'y'$ terá uma das formas dadas na Figura 9.6.1 e pode, então, ser facilmente identificada.

EXEMPLO 5 Completando o Quadrado e Transladando

Como a equação quadrática

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$

contém termos x^2, x, y^2 e y mas não um termo com produto misto, seu gráfico é uma cônica que está transladada para fora de sua posição padrão mas não rodada. A cônica pode ser colocada em posição padrão por uma translação conveniente dos eixos coordenados. Para fazer isto, primeiro coletamos os termos em x e os termos em y. Isto dá

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0 \quad \text{ou} \quad 2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Completando os quadrados[1] nas duas expressões entre parênteses, obtemos

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

ou

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \qquad (3)$$

Se nós transladamos os eixos coordenados pelas equações de translação

$$x' = x - 3, \qquad y' = y - 2$$

a equação (3) passa a ser

$$2x'^2 + y'^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse em posição padrão no sistema $x'y'$. Esta elipse está esboçada na Figura 9.6.3. ♦

[1] Para completar o quadrado numa expressão da forma $x^2 + px$, somamos e subtraímos a constante $(p / 2)^2$ para obter

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

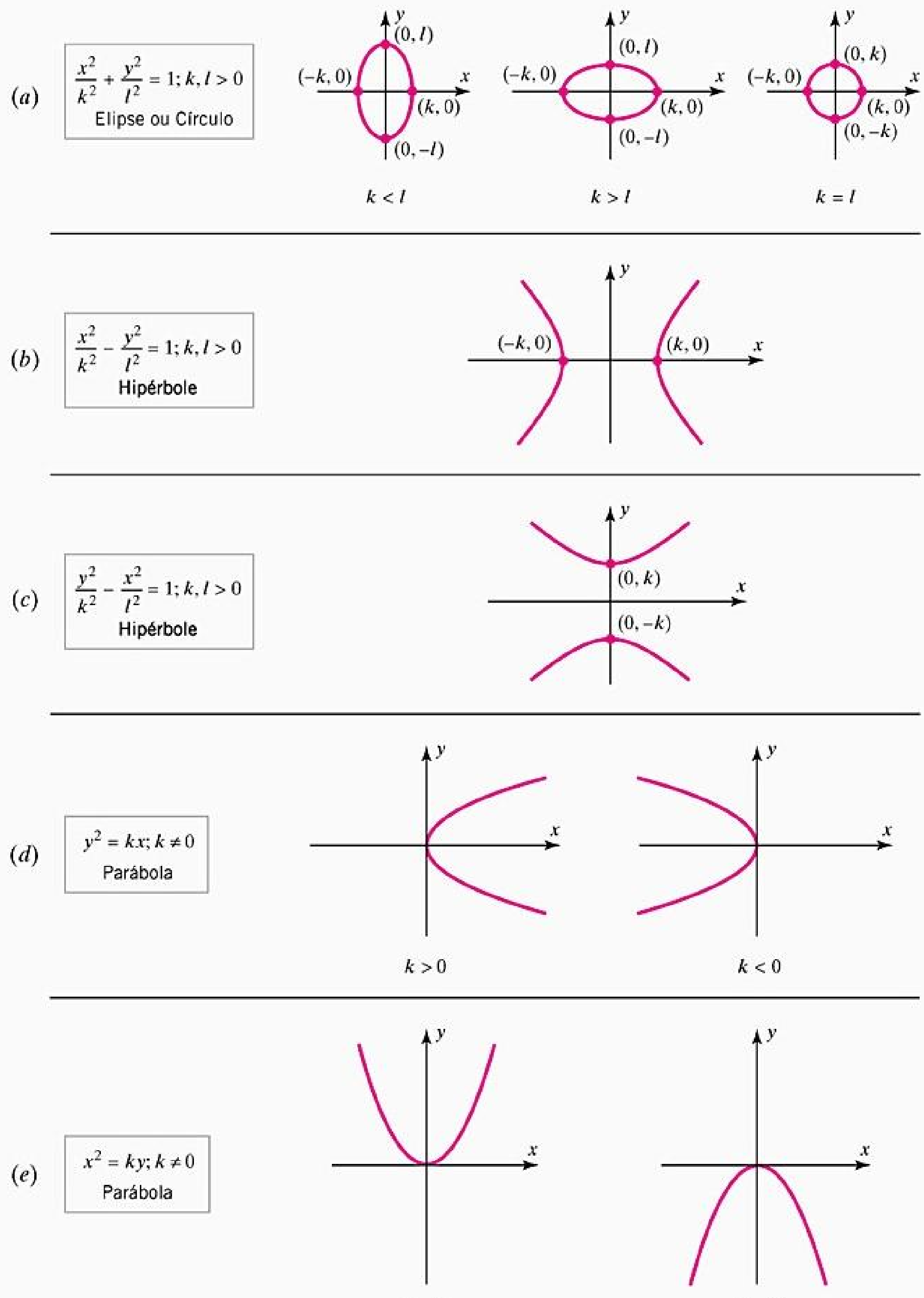
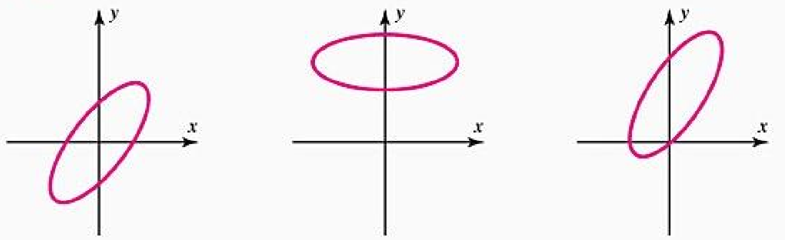


Figura 9.6.1



(a) Rodada (b) Transladada (c) Rodada e transladada

Figura 9.6.2

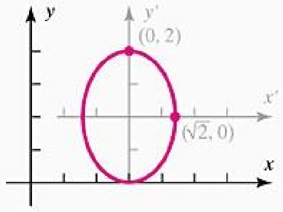


Figura 9.6.3 $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$

Eliminando o Termo com Produto Misto Agora iremos mostrar como identificar as cônicas que estão rodadas para fora de sua posição padrão. Se nós omitirmos os colchetes de matrizes 1×1, então poderemos escrever (2) no formato matricial

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

ou

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad K = [d \quad e]$$

Agora considere uma cônica C cuja equação em coordenadas xy é

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \tag{4}$$

Nós gostaríamos de girar os eixos coordenados xy de tal maneira que a equação da cônica no novo sistema $x'\,y'$ não tenha termo com produto misto. Isto pode ser feito como segue.

Passo 1. Encontre uma matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a matriz A.

Passo 2. Permute as colunas de P, se necessário, para ter $\det(P) = 1$. Isto garante que a transformação ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{5}$$

é uma rotação.

Passo 3. Para obter a equação de C no sistema $x'\,y'$, substitua (5) em (4). Isto dá

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + f = 0$$

ou

$$(\mathbf{x}')^T(P^TAP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + f = 0 \tag{6}$$

Como P diagonaliza A ortogonalmente,

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. Assim, (6) pode ser reescrito como

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

ou

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(onde $d' = dp_{11} + e\,p_{21}$ e $e' = dp_{12} + e\,p_{22}$). Esta equação não tem termo com produto misto.

O seguinte teorema resume esta discussão.

Teorema 9.6.2 **Teorema dos Eixos Principais em R^2**

Seja

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

a equação de uma cônica C e seja

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

a forma quadrática associada. Então os eixos coordenados podem ser girados de tal modo que a equação de C no novo sistema x' y' tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. A rotação pode ser efetuada pela substituição

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

onde P diagonaliza A ortogonalmente e $\det(P) = 1$.

EXEMPLO 6 Eliminando o Termo com Produto Misto

Descreva a cônica C cuja equação é $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

Solução.

A forma matricial desta equação é

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - 36 = 0 \tag{7}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

de modo que $\lambda = 4$ e $\lambda = 9$ são os autovalores de A. Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$\lambda = 4: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 9: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

são bases ortonormais para os auto-espaços. Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

diagonaliza A ortogonalmente. Além disto, $\det(P) = 1$, de modo que a transformação ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \tag{8}$$

é uma rotação. Substituindo (8) em (7), obtemos

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') - 36 = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{x}')^T(P^TAP)\mathbf{x}' - 36 = 0$$

Como

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

esta equação pode ser escrita como

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação da elipse esboçada na Figura 9.6.4. Naquela figura, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são os vetores-coluna de P. ♦

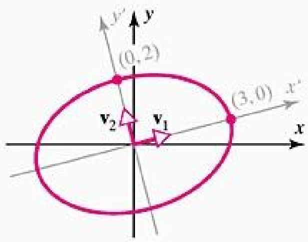


Figura 9.6.4 $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

EXEMPLO 7 Eliminando o Termo com Produto Misto e Transladando

Descreva a cônica C cuja equação é

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$$

Solução.

A forma matricial desta equação é

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} + K\mathbf{x} + 4 = 0 \tag{9}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = [4\sqrt{5} \; -16\sqrt{5}]$$

Como mostramos no Exemplo 6,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza A ortogonalmente e tem determinante 1. Substituindo $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ em (9), obtemos

$$(P\mathbf{x}')^TA(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + 4 = 0$$

ou

$$(\mathbf{x}')^T(P^TAP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + 4 = 0 \tag{10}$$

Como

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [-8 \quad -36]$$

a equação (10) pode ser escrita como

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \tag{11}$$

Para colocar a cônica em posição padrão, devemos transladar os eixos $x'y'$. Procedendo como no Exemplo 5, nós escrevemos (11) como

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \tag{12}$$

Se nós transladamos os eixos coordenados pelas equações de translação

$$x'' = x' - 1, \qquad y'' = y' - 2$$

então (12) passa a ser

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que é a equação da elipse esboçada na Figura 9.6.5. Naquela figura, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são os vetores-coluna de P. ♦

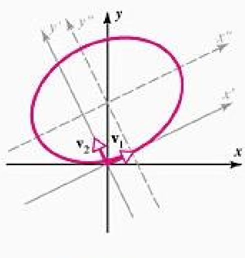


Figura 9.6.5 $\dfrac{x''^2}{9} + \dfrac{y''^2}{4} = 1$

Conjunto de Exercícios 9.6

1. Em cada parte, encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática a uma soma ou diferença de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.

(a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$ (b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$ (c) $2x_1x_2$ (d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$

2. Em cada parte, encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática a uma soma ou diferença de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.

(a) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ (b) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
(c) $-5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_2$ (d) $2x_1x_3 + 6x_2x_3$

3. Encontre as formas quadráticas associadas às seguintes equações quadráticas.

(a) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$ (b) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$ (c) $5xy = 8$
(d) $4x^2 - 2y^2 = 7$ (e) $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

4. Encontre as matrizes das formas quadráticas no Exercício 3.

5. Expresse cada uma das formas quadráticas no Exercício 3 na forma matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$.

6. Identifique as seguintes cônicas.

(a) $2x^2 + 5y^2 = 20$ (b) $4x^2 + 9y^2 = 1$ (c) $x^2 - y^2 - 8 = 0$ (d) $4y^2 - 5x^2 = 20$
(e) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (f) $7y^2 - 2x = 0$ (g) $-x^2 = 2y$ (h) $3x - 11y^2 = 0$
(i) $y - x^2 = 0$ (j) $x^2 - 3 = -y^2$

7. Em cada parte, a cônica é colocada em posição padrão por uma translação. Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas transladado.

(a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$ (b) $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$
(c) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$
(e) $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$ (f) $x^2 + 10x + 7y = -32$

8. As seguintes cônicas não-degeneradas foram rodadas para fora de sua posição padrão. Em cada parte, rode o sistema de coordenadas para remover o termo xy. Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas rodado.

(a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ (b) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$
(c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

Nos Exercícios 9–14, translade e rode o sistema de coordenadas, se necessário, para colocar a cônica em posição padrão. Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas final.

9. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$ **10.** $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

11. $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$ **12.** $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

13. $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$ **14.** $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

15. O gráfico de uma equação quadrática em x e y pode, em certos casos, ser um ponto, uma reta, ou um par de retas; estas cônicas são chamadas ***degeneradas***. Também é possível que a equação não seja satisfeita por nenhum valor real de x e y. Nestes casos, a equação não possui gráfico e dizemos que representa uma ***cônica imaginária***. Cada uma das seguintes equações representa uma cônica degenerada ou imaginária. Quando possível, faça um esboço do gráfico.

(a) $x^2 - y^2 = 0$ (b) $x^2 + 3y^2 + 7 = 0$ (c) $8x^2 + 7y^2 = 0$
(d) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ (e) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$ (f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5$

9.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Nesta seção nós vamos aplicar as técnicas de diagonalização desenvolvidas nas seções anteriores a equações quadráticas em três variáveis e veremos como usar nossos resultados para estudar superfícies quádricas.

Superfícies Quádricas Uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (1)$$

onde $a, b, \ldots, f$ não são todos nulos, é chamada uma ***equação quadrática em x, y e z*** e a expressão

$$ax^2 + by^2 + bz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

é chamada a ***forma quadrática associada***.

A Equação (1) pode ser escrita no formato matricial

$$[x \;\; y \;\; z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \;\; h \;\; i]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

ou

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \quad K = [g \;\; h \;\; i]$$

EXEMPLO 1 A Forma Quadrática Associada

A forma quadrática associada à equação quadrática

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

é

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$ ♦

Os gráficos de equações quadráticas em x, y e z são chamados ***quádricas*** ou ***superfícies quádricas***. As equações mais simples de superfícies quádricas ocorrem quando estas superfícies são colocadas em certas posições padrão relativas aos eixos coordenados. A Figura 9.7.1 mostra as seis superfícies quádricas básicas e as equações para aquelas superfícies quando as superfícies estão na posição padrão mostrada na figura. Se uma quádrica é cortada por um plano, chamamos a curva de interseção o ***traço*** do plano na superfície. Para ajudar a visualizar as superfícies quádricas na Figura 9.7.1, nós mostramos e descrevemos os traços feitos por planos paralelos aos planos coordenados. A presença de um ou mais dos termos com produto misto xy, xz e yz na equação de uma quádrica indica que a quádrica está rodada para fora da posição padrão; a presença de ambos os termos em x^2 e x, y^2 e y ou z^2 e z numa quádrica sem termo com produto misto indica que a quádrica foi transladada para fora de sua posição padrão.

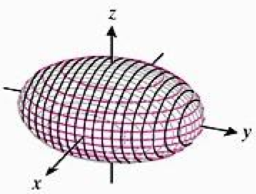
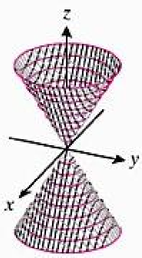
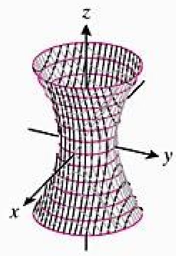
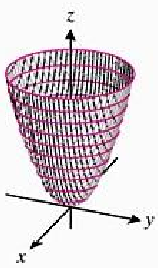
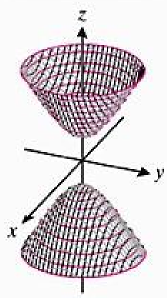
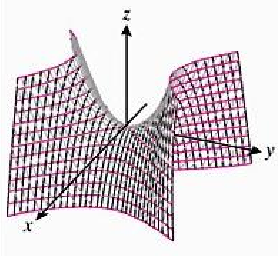
Superfície	Equação	Superfície	Equação
Elipsóide 	$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$ Os traços nos planos coordenados são elipses, bem como os traços naqueles planos que são paralelos aos planos coordenados e que intersectam a superfície em mais de um ponto.	Cone elíptico 	$z^2 = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}$ O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se cortam na origem e os traços nos planos paralelos a estes planos coordenados são hipérboles.
Hiperbolóide de uma folha 	$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$ O traço no plano xy é uma elipse, bem como os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes e que não passam pelos cortes da superfície com os eixos x e y. Nestes pontos de corte, os traços daqueles planos são pares de retas.	Parabolóide elíptico 	$z = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}$ O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos e acima do plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, bem como os traços nos planos paralelos a estes.
Hiperbolóide de duas folhas 	$\frac{z^2}{l^2} - \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ Não há traço no plano xy. Os traços nos planos paralelos ao plano xy e que cortam a superfície em mais de um ponto são elipses. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes.	Parabolóide hiperbólico 	$z = \frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{l^2}$ O traço no plano xy é um par de retas que se cortam na origem. Os traços nos planos paralelos ao plano xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem na direção y e as hipérboles abaixo do plano xy abrem na direção x. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, bem como os traços nos planos paralelos a estes.

Figura 9.71

EXEMPLO 2 Identificando uma Superfície Quádrica

Descreva a superfície quádrica cuja equação é

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

Solução.

Rearranjando os termos, obtemos

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

ou

$$4(x-2)^2 + 36(y-3)^2 - 9z^2 = 36$$

ou

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

Transladando os eixos pelas equações de translação

$$x' = x - 2, \qquad y' = y - 3, \qquad z' = z$$

dá

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = 1$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha. ♦

Eliminando os Termos com Produto Misto O procedimento para identificar as quádricas que foram rodadas para fora de sua posição padrão é similar ao procedimento para cônicas. Seja Q a superfície quádrica cuja equação nas coordenadas xyz é

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0 \qquad (2)$$

Nós queremos rodar os eixos coordenados xyz de tal modo que a equação da quádrica no novo sistema de coordenadas $x'\,y'\,z'$ não tenha termo com produto misto. Isto pode ser feito como segue:

Passo 1. Encontre uma matriz P que diagonaliza ortogonalmente a matriz A.

Passo 2. Permute as colunas de P, se necessário, para ter $\det(P) = 1$. Isto garante que a transformação ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

é uma rotação.

Passo 3. Substitua (3) em (2). Isto irá produzir uma equação para a quádrica nas coordenadas $x'\,y'\,z'$ sem termo com produto misto. (A prova é similar à de cônicas e é deixada como exercício.)

O seguinte teorema resume esta discussão.

Teorema 9.7.1 Teorema dos Eixos Principais em R^3

Seja

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

a equação de uma quádrica Q e seja

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

a forma quadrática associada. Os eixos coordenados podem ser rodados de tal modo que a equação de Q no sistema $x'y'z'$ tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores de A. A rotação pode ser efetuada pela substituição

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

onde P diagonaliza A ortogonalmente e $\det(P) = 1$.

EXEMPLO 3 Eliminando os Termos com Produto Misto

Descreva a superfície quádrica cuja equação é

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

Solução.

A forma matricial da equação quadrática é

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - 3 = 0 \qquad (4)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como mostramos no Exemplo 1 da Seção 7.3, os autovalores de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 8$ e A é ortogonalmente diagonalizável pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

onde os dois primeiros vetores-coluna de P são autovetores associados a $\lambda = 2$ e o terceiro vetor-coluna é um autovetor associado a $\lambda = 8$.

Como $\det(P) = 1$ (verifique), a transformação ortogonal de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ é uma rotação. Substituindo esta expressão em (4), obtemos

$$(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') - 3 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$(\mathbf{x}')^T(P^T AP)\mathbf{x}' - 3 = 0 \qquad (5)$$

Como

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

a Equação (5) pode ser escrita como

$$[x' \quad y' \quad z']\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} - 3 = 0$$

ou

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

Isto pode ser reescrito como

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

que é a equação de um elipsóide. ♦

Conjunto de Exercícios 9.7

1. Encontre as formas quadráticas associadas às seguintes equações quadráticas.

(a) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$
(b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$
(c) $xy + xz + yz = 1$
(d) $x^2 + y^2 - z^2 = 7$
(e) $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$
(f) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$

2. Encontre as matrizes das formas quadráticas no Exercício 1.

3. Expresse cada uma das equações quadráticas dadas no Exercício 1 na forma matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\,\mathbf{x} + j = 0$.

4. Identifique as seguintes quádricas.

(a) $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$
(b) $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$
(c) $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$
(d) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
(e) $16x^2 + y^2 = 16z$
(f) $7x^2 - 3y^2 + z = 0$
(g) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

5. Em cada parte, determine as equações de translação que colocam a quádrica em posição padrão. Identifique a quádrica.

(a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$
(b) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$
(c) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$
(d) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$
(e) $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$
(f) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$
(g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$

6. Em cada parte, encontre uma rotação $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ que remova os termos com produto misto. Identifique a quádrica e dê sua equação no sistema $x'y'z'$.

(a) $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$
(b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$
(c) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$
(d) $2xy + z = 0$

Nos Exercícios 7–10, translade e rode o sistema de coordenadas para colocar a quádrica em posição padrão. Identifique a quádrica e dê sua equação no sistema de coordenadas final.

7. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$

8. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

9. $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

10. $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

11. Prove o Teorema 9.7.1.

9.8 COMPARAÇÃO DOS PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEARES

Nesta seção nós vamos discutir alguns aspectos práticos da resolução de sistemas de equações lineares, da inversão de matrizes e da obtenção de autovalores. Embora nós já tenhamos discutido anteriormente métodos para efetuar estes cálculos, aqueles métodos não são diretamente aplicáveis à solução por computador dos problemas de grande escala que aparecem nas aplicações do mundo real.

Contando Operações A maioria das quantidades numéricas são arredondadas ou truncadas pelos computadores, dado o limitado número de casas decimais com que eles podem trabalhar. Por exemplo, um computador projetado para armazenar oito casas decimais poderia gravar $\frac{2}{3}$ tanto como 0,66666667 (arredondado) quanto 0,66666666 (truncado). Em qualquer caso, é introduzido um erro que nós chamamos ***erro de arredondamento***.

As principais considerações práticas na resolução de problemas de Álgebra Linear em computadores digitais são minimizar o tempo de computação (e portanto os custos) necessário para obter a solução e minimizar inexatidões devidas a erros de arredondamento. Assim, um algoritmo computacional bom usa o mínimo possível de operações e efetua estas operações de modo a minimizar o efeito dos erros de arredondamento.