Espaços Vetoriais Euclidianos

4

Conteúdo do Capítulo

4.1 Espaço Euclidiano n–dimensional

4.2 Transformações Lineares de R^n em R^m

4.3 Propriedades das Transformações Lineares de R^n em R^m

INTRODUÇÃO: Em meados do século dezessete foi materializada explicitamente a idéia de utilizar pares de números para situar pontos no plano e ternos de números para situar pontos no espaço tridimensional. Na segunda metade do século dezoito, os matemáticos e físicos começaram a perceber que não havia necessidade de parar com ternos, pois quádruplos (a_1, a_2, a_3, a_4) de números poderiam ser considerados pontos de um espaço de dimensão quatro, quíntuplos $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ de números como pontos num espaço de dimensão cinco e assim por diante, uma n–upla de números sendo pontos de um "espaço n–dimensional." Nosso objetivo neste capítulo é estudar as propriedades das operações sobre os vetores deste tipo de espaço.

4.1 ESPAÇO EUCLIDIANO n–DIMENSIONAL

Embora nossa visualização geométrica não se estenda além do espaço tridimensional, é possível, mesmo assim, estender além do espaço tridimensional muitas das idéias familiares trabalhando, não com as propriedades geométricas de pontos e vetores mas sim com suas propriedades numéricas ou algébricas. Nesta seção nós iremos tornar estas idéias mais precisas.

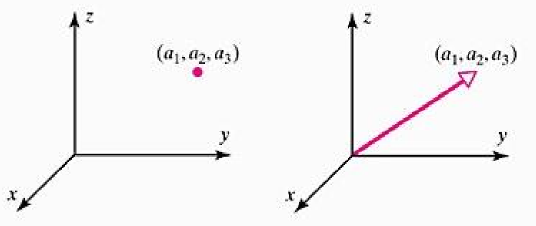
Vetores no Espaço n–dimensional Começamos com uma definição.

Definição

Se n é um inteiro positivo, dizemos que uma seqüência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reais é uma ***n–upla ordenada***. O conjunto de todas as n–uplas ordenadas é chamado o ***espaço n–dimensional*** e denotado por R^n.

Quando $n = 2$ ou 3, é usual usar os termos ***par ordenado*** e ***terno ordenado***, respectivamente, em vez de 2–upla e 3–upla. Quando $n = 1$, cada n–upla ordenada consiste simplesmente de um número real e por isso podemos ver R^1 como o conjunto de números reais; neste caso, é comum escrever R em vez de R^1.

No estudo do espaço tridimensional, pode haver ocorrido a você que o símbolo (a_1, a_2, a_3) tem duas interpretações geométricas distintas: pode ser interpretado como um ponto, caso em que a_1, a_2 e a_3 são as coordenadas (Figura 4.1.1*a*), ou pode ser interpretado como um vetor, caso em que a_1, a_2 e a_3 são os componentes (Figura 4.1.1*b*). Segue-se, portanto, que uma n–upla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pode ser vista tanto como um "ponto generalizado" quanto um "vetor generalizado"—a distinção matemática não é importante. Assim, podemos descrever a 5–upla $(-2, 4, 0, 1, 6)$ tanto como um ponto de R^5 quanto um vetor em R^5.



(*a*) (*b*)

Figura 4.1.1 O terno ordenado (a_1, a_2, a_3) pode ser interpretado geometricamente como um ponto ou um vetor.

Definição

Dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n são ditos ***iguais*** se

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

A ***soma*** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é definida por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

e se k é um escalar qualquer, o ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ é definido por

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

As operações de adição e multiplicação por escalar nesta definição são chamadas as ***operações padrão*** em R^n.

O ***vetor nulo*** ou ***zero*** de R^n é denotado por $\mathbf{0}$ e é definido como

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é um vetor qualquer de R^n, então o ***negativo*** (ou ***inverso aditivo***) de $\mathbf{u}$ é denotado por $-\mathbf{u}$ e definido por

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

A ***diferença*** de vetores em R^n é definida por

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$

ou, em termos de componentes,

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots, v_n - u_n)$$

Propriedades das Operações Vetoriais no Espaço n–dimensional As propriedades aritméticas mais importantes da adição e da multiplicação por escalar de vetores em R^n estão listadas no próximo teorema. As provas são todas fáceis e deixadas como exercícios.

Teorema 4.1.1 **Propriedades de Vetores em R^n**

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n e k e l são escalares, então:

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (*b*) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, *ou seja*, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(*e*) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$ (*f*) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$
(*g*) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$ (*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Este teorema nos autoriza a operar com vetores em R^n sem expressá-los em termos de componentes. Por exemplo, para resolver a equação vetorial $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ em $\mathbf{x}$, nós podemos somar $-\mathbf{u}$ a ambos os lados e proceder como segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) \\ \mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} + \mathbf{0} &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

O leitor achará instrutivo determinar os itens do Teorema 4.1.1 que justificam os três últimos passos desta conta.

Espaço Euclidiano n–dimensional Para estender as noções de distância, norma e ângulo ao R^n, nós começamos com a seguinte generalização do produto escalar de R^2 e R^3 [Fórmulas (3) e (4) da Seção 3.3].

Definição

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores quaisquer em R^n, então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

define o ***produto interno euclidiano*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Observe que para $n = 2$ ou 3, o produto interno euclidiano é o produto escalar usual.

EXEMPLO 1 Produto Interno de Vetores no R^4

O produto interno euclidiano dos vetores

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

em R^4 é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$ ♦

Como tantas das idéias familiares dos espaços bi e tridimensionais continuam válidas no espaço n–dimensional, é comum nos referirmos ao R^n com as operações de adição, multiplicação por escalar e o produto interno euclidiano como o ***espaço euclidiano n–dimensional***.

As quatro principais propriedades aritméticas do produto interno euclidiano são dadas no próximo teorema.

Teorema 4.1.2 **Propriedades do Produto Interno Euclidiano**

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n *e* l *é um escalar, então:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $(l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$. *Além disto,* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = 0$.

Nós iremos provar as partes (*b*) e (*d*) e deixar as demais provas como exercícios.

Prova (b). Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Então

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \cdots + (u_n + v_n)w_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\end{aligned}$$

Prova (d). Nós temos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0$. Além disto, a igualdade vale se, e somente se, $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$, ou seja, se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ■

EXEMPLO 2 Comprimento e Distância em R^4

O Teorema 4.1.2 nos permite efetuar contas com produtos internos euclidianos praticamente da mesma maneira que as efetuamos com produtos aritméticos comuns. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

O leitor deveria determinar quais partes do Teorema 4.1.2 foram usadas em cada passo. ♦

Norma e Distância no Espaço Euclidiano n–dimensional Por analogia com as fórmulas familiares do R^2 e R^3, nós definimos a ***norma euclidiana*** (ou o ***comprimento euclidiano***) de um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em R^n por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \tag{1}$$

[Compare esta fórmula com as Fórmulas (1) e (2) da Seção 3.2.]

Da mesma forma, a ***distância euclidiana*** entre os pontos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ do R^n é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \tag{2}$$

[Veja as Fórmulas (3) e (4) da Seção 3.2.]

EXEMPLO 3 Encontrando Norma e Distância

Se $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ e $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ então temos, no espaço euclidiano R^4,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

e

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$ ♦

O próximo teorema fornece a desigualdade de ***Cauchy-Schwarz***, uma das desigualdades mais importantes da Álgebra Linear.

Teorema 4.1.3 **A Desigualdade de Cauchy-Schwarz em R^n**

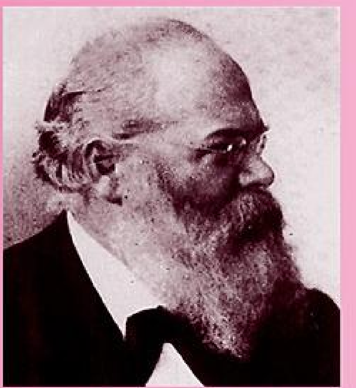
Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *são vetores em* R^n, *então:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \tag{3}$$

Em termos de componentes, (3) é o mesmo que

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{4}$$

Augustin Louis (Baron de) Cauchy



Herman Armandus Schwarz

Augustin Louis (Baron de) Cauchy (1789–1857) foi um matemático francês. A educação básica de Cauchy foi adquirida de seu pai, um advogado e mestre dos clássicos. Cauchy ingressou na Escola Politécnica em 1805 para estudar engenharia, mas por causa de sua saúde frágil, foi aconselhado a especializar em Matemática. Seu principal trabalho matemático começou em 1811, com uma série de soluções brilhantes a alguns difíceis e importantes problemas.

As contribuições matemáticas de Cauchy nos 35 anos seguintes foram brilhantes e inacreditáveis em quantidade: mais de 700 artigos, que preenchem 26 volumes modernos. O trabalho de Cauchy iniciou a era da análise moderna; ele trouxe à Matemática padrões de precisão e de rigor impensáveis para os matemáticos mais antigos.

A vida de Cauchy foi inextrincavelmente ligada aos tumultos políticos de sua época. Por ser fortemente partidário da família Bourbon, ele abandonou mulher e filhos em 1830 para seguir o rei Carlos X ao exílio. Por sua lealdade ele foi feito um barão pelo ex-rei. Mais tarde, Cauchy retornou à França mas só veio a aceitar uma posição universitária quando o governo abriu mão da exigência de um juramento de lealdade.

É difícil compreender Cauchy muito bem. Profundamente católico, ele patrocinava trabalho de caridade para mães solteiras e criminosos bem como socorro para a Irlanda. No entanto, outros aspectos de sua vida o colocam noutra luz. O matemático norueguês Abel o descreveu como "louco, infinitamente católico e fanático." Alguns escritores louvam suas aulas, enquanto outros dizem que ele falava incessante e incoerentemente e, de acordo com um relatório, uma vez ele dedicou uma aula inteira à extração da raiz quadrada de dezessete até a décima casa decimal por um método muito bem conhecido de seus alunos. De qualquer forma, Cauchy é indiscutivelmente uma das maiores mentes da história da ciência.

Herman Armandus Schwarz (1843–1921) foi um matemático alemão. Schwarz foi o líder matemático de Berlim da primeira metade do século vinte. Por causa de sua dedicação ao ensino na Universidade de Berlim e de uma propensão para tratar com a mesma dedicação tanto fatos importantes quanto triviais, ele não publicou muito abundantemente. Sua tendência era concentrar-se em problemas concretos específicos mas suas técnicas eram, muitas vezes, extremamente engenhosas e influenciaram o trabalho de outros matemáticos. A versão da desigualdade que leva o seu nome apareceu num artigo sobre superfícies de área mínima publicado em 1885.

Nós omitimos a prova, pois adiante neste texto demonstraremos uma versão mais geral deste teorema. No entanto, para vetores do R^2 e R^3, este resultado é uma conseqüência simples da Fórmula (1) da Seção 3.3: Se **u** e **v** são vetores não-nulos do R^2 e R^3,

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\theta| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \qquad (5)$$

e, se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então ambos os lados de (3) são zero, de modo que a desigualdade vale também neste caso.

Os próximos dois teoremas apresentam as propriedades básicas de comprimento e distância no espaço euclidiano n–dimensional.

Teorema 4.1.4 **Propriedades do Comprimento em R^n**

Se **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n *e* k *é um escalar, então*:

(*a*) $\|\mathbf{u}\| \ge 0$ (*b*) $\|\mathbf{u}\| = 0$ *se, e somente se*, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*c*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$ (*d*) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdade triangular*)

Nós iremos provar (*c*) e (*d*) e deixar (*a*) e (*b*) como exercícios.

Prova (c). Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, então $k\,\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$ e portanto

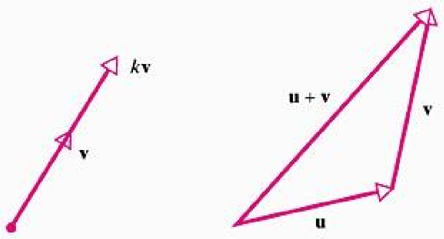
$$\begin{aligned}\|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2}\\ &= |k|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\\ &= |k|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Prova (d).

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{Propriedade do valor absoluto}\\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz}\\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

O resultado agora segue extraindo a raiz quadrada em ambos os lados. ■

A parte (*c*) deste teorema afirma que multiplicando um vetor por um escalar k multiplica o comprimento daquele vetor por um fator de $|k|$ (Figura 4.1.2*a*). A parte (*d*) deste teorema é conhecida como a ***desigualdade triangular*** por que generaliza o resultado familiar da geometria euclidiana segundo o qual a soma de dois dos lados de um triângulo é pelo menos tão grande quanto o terceiro lado (Figura 4.1.2*b*).



(a) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Figura 4.1.2

Teorema 4.1.5 **Propriedades da Distância em R^n**

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n, *então*:

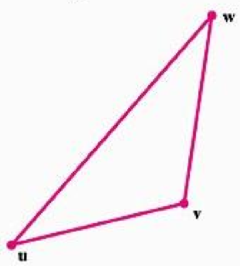
(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ge 0$ (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se*, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \le d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
(*Desigualdade triangular*)

Os resultados deste teorema são conseqüências imediatas do Teorema 4.1.4. Nós iremos provar a parte (d) e deixar as demais como exercícios.

Prova (d). Por (2) e pela parte (d) do Teorema 4.1.4 nós temos

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + (\mathbf{w}-\mathbf{v})\| \\ &\le \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$ ■

A parte (d) deste teorema, que também é chamada a *desigualdade triangular*, generaliza o resultado familiar da geometria euclidiana que afirma que a menor distância entre dois pontos é obtida ao longo de uma reta (Figura 4.1.3).



$d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \le d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

Figura 4.1.3

A Fórmula (1) expressa a norma de um vetor em termos do produto escalar. O seguinte teorema útil expressa o produto escalar em termos de normas.

Teorema 4.1.6

Se $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são vetores em* R^n *com o produto interno euclidiano, então*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \tag{6}$$

Prova.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

e (6) decorre por álgebra elementar. ■

Nos exercícios apresentamos alguns problemas que usam este teorema.

Ortogonalidade Lembre que nos espaços euclidianos R^2 e R^3, dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são definidos como sendo *ortogonais* (ou perpendiculares) se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ (Seção 3.3). Motivados por isto, nós apresentamos a seguinte definição.

Definição

Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ***ortogonais*** se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

EXEMPLO 4 **Vetores Ortogonais em R^4**

Os vetores

$$\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$$

são ortogonais no espaço euclidiano R^4, pois

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$ ◆

As propriedades dos vetores ortogonais serão discutidas com mais detalhe mais adiante no texto, mas agora observamos que muitas das propriedades familiares de vetores ortogonais dos espaços euclidianos R^2 e R^3 continuam valendo no espaço euclidiano R^n. Por exemplo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais de R^2 ou de R^3, então $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ formam os lados de um triângulo retângulo (Figura 4.1.4); assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

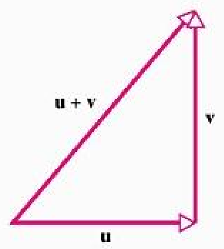


Figura 4.1.4

O próximo teorema mostra que este resultado estende ao R^n.

Teorema 4.1.7 **O Teorema de Pitágoras em R^n**

Se $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são vetores ortogonais em* R^n *com o produto interno euclidiano, então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Prova.

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad ■$$

Notações Alternativas para Vetores em R^n

Muitas vezes é útil escrever um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de R^n em notação matricial como uma matriz-linha ou uma matriz-coluna:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$$

Isto é justificado da seguinte maneira: as operações matriciais

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}, \qquad k\mathbf{v} = k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] + [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \\ &= [u_1+v_1 \quad u_2+v_2 \quad \cdots \quad u_n+v_n] \\ k\mathbf{v} = k[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] &= [kv_1 \quad kv_2 \quad \cdots \quad kv_n] \end{aligned}$$

produzem os mesmo resultados que as operações vetoriais

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$$

$$k\,\mathbf{v} = k\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

A única diferença é o formato em que escrevemos os vetores.

Uma Fórmula Matricial para o Produto Escalar

Se nós usarmos a notação de matrizes-coluna para os vetores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

e omitirmos o colchete de matrizes 1×1, então teremos

$$\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n] = [\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}] = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

Assim, para vetores na notação de matrizes-coluna nós temos a seguinte fórmula para o produto interno euclidiano:

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}} \tag{7}$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = [5 \quad -4 \quad 7 \quad 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = [18] = 18$$

Se A é uma matriz $n \times n$, então segue da Fórmula (7) e das propriedades da transposta que

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}^T(A\mathbf{u}) = (\mathbf{v}^TA)\mathbf{u} = (A^T\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} &= (A\mathbf{v})^T\mathbf{u} = (\mathbf{v}^TA^T)\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

As fórmulas

$$\boxed{A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}} \tag{8}$$

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} \tag{9}$$

fornecem uma relação importante entre multiplicação por uma matriz $n \times n$ A e multiplicação por A^T.

EXEMPLO 5 Verificando que $A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$

Suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

do que segue que

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11 \\ \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v} &= (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11 \end{aligned}$$

Assim, vale $A\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$, como garante a Fórmula (8). Deixamos para o leitor verificar que (9) também vale. ♦

A Multiplicação Matricial do Ponto de Vista do Produto Escalar

O produto escalar fornece uma outra maneira de pensar sobre a multiplicação matricial. Lembre que se $A = [\,a_{ij}\,]$ é uma matriz $m \times r$ e $B = [\,b_{ij}\,]$ é uma matriz $r \times n$ então a ij-ésima entrada de $A\,B$ é

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

que é o produto escalar do i-ésimo vetor-linha

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ir}]$$

de A com o j-ésimo vetor-coluna

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

de B. Assim, se $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ são os vetores-linha de A e se $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ são os vetores-coluna de B então podemos escrever o produto matricial $A\,B$ como

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Em particular, podemos escrever um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no formato de produto escalar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{11}$$

onde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ são os vetores-linha de A e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são as entradas de $\mathbf{b}$.

EXEMPLO 6 Um Sistema Linear Escrito na Forma de Produto Escalar

Um exemplo de um sistema linear expresso no formato (11) de produto escalar é:

Sistema	Forma de Produto Escalar
$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} (3, -4, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (2, -7, -4) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (1, 5, -8) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ♦

Conjunto de Exercícios 4.1

1. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$. Encontre

(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$ (c) $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$ (d) $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$ (e) $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (f) $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

2. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 1. Encontre os vetores $\mathbf{x}$ que satisfazem $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$.

3. Sejam $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ e $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$. Encontre escalares c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3).$$

4. Mostre que não existem escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

5. Em cada parte, calcule a norma euclidiana do vetor.

(a) $(-2, 5)$ (b) $(1, 2, -2)$ (c) $(3, 4, 0, -12)$ (d) $(-2, 1, 1, -3, 4)$

6. Sejam $\mathbf{u} = (4, 1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 8, -2)$ e $\mathbf{w} = (3, 1, 2, 2)$. Calcule cada expressão.

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$

(d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (e) $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

7. Mostre que se $\mathbf{v}$ é um vetor não-nulo em R^n então $(1 / \|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$ tem norma euclidiana 1.

8. Seja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.

9. Encontre o produto interno euclidiano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, 5)$, $\mathbf{v} = (-4, 3)$ (b) $\mathbf{u} = (4, 8, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (3, 1, 4, -5)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -4, -3)$ (d) $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 4, -3)$, $\mathbf{v} = (-2, -2, 0, 2, -1)$

10. (a) Encontre dois vetores em R^2 de norma euclidiana 1 cujo produto interno euclidiano com $(3, -1)$ é zero.

(b) Mostre que há infinitos vetores em R^3 de norma euclidiana 1 cujo produto interno euclidiano com o vetor $(1, -3, 5)$ é zero.

11. Encontre a distância euclidiana entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$

(c) $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$ (d) $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3)$, $\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0)$

12. Verifique as partes (*b*), (*e*), (*f*) e (*g*) do Teorema 4.1.1 para $\mathbf{u} = (2, 0, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 3, 5)$, $\mathbf{w} = (1, 6, -2, 1)$, $k = 5$ e $l = -3$.

13. Verifique as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 4.1.2 para os valores de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e k do Exercício 12.

14. Em cada parte, determine se os vetores dados são ortogonais.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$ (b) $\mathbf{u} = (-2, -2, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$ (d) $\mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2, 9)$

(e) $\mathbf{u} = (0, 3, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (5, 2, -1, 0)$ (f) $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (-b, a)$

15. Para quais valores de k os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$ (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

16. Encontre dois vetores de norma 1 que são ortogonais aos três vetores $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

17. Em cada parte, verifique que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(a) $\mathbf{u} = (3, 2),\ \mathbf{v} = (4, -1)$ (b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0),\ \mathbf{v} = (2, -1, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1),\ \mathbf{v} = (8, -4, -2)$ (d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1),\ \mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

18. Em cada parte, verifique que valem as Fórmulas (8) e (9).

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

19. Resolva o seguinte sistema linear em x_1, x_2 e x_3.

$$\begin{aligned} (1, -1, 4) \cdot (x_1, x_2, x_3) &= 10 \\ (3, 2, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) &= 1 \\ (4, -5, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) &= 7 \end{aligned}$$

20. Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ sabendo que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 1$ e $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 5$.

21. Use o Teorema 4.1.6 para mostrar que **u** e **v** sempre são vetores ortogonais em R^n se $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Interprete este resultado geometricamente em R^2.

22. As fórmulas para os componentes vetoriais do Teorema 3.3.3 também valem em R^n. Dados $\mathbf{a} = (-1, 1, 2, 3)$ e $\mathbf{u} = (2, 1, 4, -1)$, encontre o componente vetorial de **u** ao longo de **a** e o componente vetorial de **u** ortogonal a **a**.

23. Determine se as duas retas

$$\mathbf{r} = (3, 2, 3, -1) + t\,(4, 6, 4, -2) \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = (0, 3, 5, 4) + t\,(1, -3, -4, -2)$$

intersectam em R^4.

24. Prove a seguinte generalização do Teorema 4.1.7. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ são vetores dois a dois ortogonais em R^n então

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

25. Prove: Se **u** e **v** são matrizes $n \times 1$ e A é uma matriz $n \times n$, então

$$(\mathbf{v}^T A^T A\mathbf{u})^2 \leq (\mathbf{u}^T A^T A\mathbf{u})(\mathbf{v}^T A^T A\mathbf{v})$$

26. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$$(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

para todos os valores reais de a, b e θ.

27. Prove: Se **u**, **v** e **w** são vetores em R^n e k é um escalar, então

(a) $\mathbf{u} \cdot (k\,\mathbf{v}) = k\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

28. Prove as partes (*a*) a (*d*) do Teorema 4.1.1.

29. Prove as partes (*e*) a (*h*) do Teorema 4.1.1.

30. Prove as partes (*a*) e (*c*) do Teorema 4.1.2.

31. Prove as partes (*a*) e (*b*) do Teorema 4.1.4.

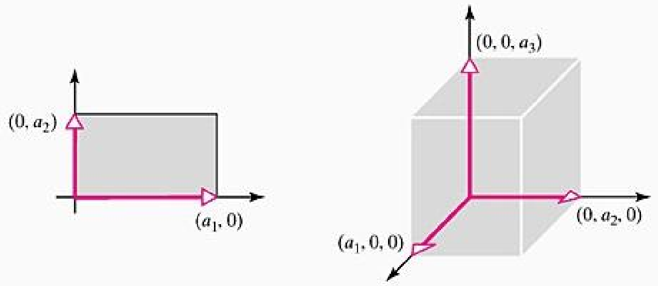
32. Prove as partes (*a*), (*b*) e (*c*) do Teorema 4.1.5.

33. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos. Em R^2, os vetores $\mathbf{v}_1 = (a_1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, a_2)$ determinam um retângulo de área $A = a_1 a_2$ (veja figura dada) e em R^3, os vetores $\mathbf{v}_1 = (a_1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, a_2, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, a_3)$ determinam uma caixa de volume $V = a_1\, a_2\, a_3$ (veja figura dada). A área A e o volume V são chamados, às vezes, a ***medida euclidiana*** do retângulo e da caixa, respectivamente.

(a) Como você definiria a medida euclidiana da "caixa" em R^n que é determinada pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{v}_n = (0, 0, 0, \ldots, a_n)\,?$$

(b) Como você definiria o comprimento euclidiano da *diagonal* da caixa da parte (a)?



Área $A = a_1 a_2$ Volume $V = a_1 a_2 a_3$

Figura Ex-33

Discussão e Descoberta

34. (a) Suponha que **u** e **v** são vetores em R^n. Mostre que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

(b) O resultado na parte (a) enuncia um teorema sobre paralelogramos em R^2. Qual é o teorema?

35. (a) Se **u** e **v** são vetores ortogonais em R^n tais que $\|\mathbf{u}\| = 1$ e $\|\mathbf{v}\| = 1$, então $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$ ______________.

(b) Faça um desenho para ilustrar este resultado.

36. Na figura dada, os vetores **u**, **v** e **u** – **v** formam um triângulo em R^2 e θ denota o ângulo entre **u** e **v**. Pela lei dos cossenos da Trigonometria decorre que

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Você diria que esta fórmula contínua válida se **u** e **v** são vetores em R^n? Justifique sua resposta.

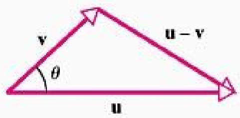


Figura Ex-36

37. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, então **u** e **v** são vetores ortogonais.

(b) Se **u** é ortogonal a **v** e a **w**, então **u** é ortogonal a **v** + **w**.

(c) Se **u** é ortogonal a **v** + **w**, então **u** é ortogonal a **v** e a **w**.

(d) Se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(e) Se $\|k\,\mathbf{v}\| = k\,\|\mathbf{v}\|$, então $k \geq 0$.

4.2 TRANSFOMAÇÕES LINEARES DE R^n EM R^m

Nesta seção nós iremos começar o estudo de funções da forma $\mathbf{w} = F(\mathbf{x})$, onde a variável independente $\mathbf{x}$ é um vetor em R^n e a variável dependente $\mathbf{w}$ é um vetor em R^m. Estamos particularmente interessados em estudar uma classe especial de tais funções, chamadas "transformações lineares." As transformações lineares são fundamentais no estudo da Álgebra Linear e têm muitas aplicações na Física, Engenharias, Ciências Sociais e em vários ramos da Matemática.

Funções de R^n em R Lembre que uma função é uma regra f que associa a cada elemento de um conjunto A um, e exatamente um, elemento de um conjunto B. Se f associa o elemento b ao elemento a então escrevemos $b = f(a)$ e dizemos que b é a ***imagem*** de a por f ou que $f(a)$ é o ***valor*** de f em a. O conjunto A é chamado o ***domínio*** de f e o conjunto B é chamado o ***contradomínio*** de f. A ***imagem*** de f é o subconjunto de B consistindo de todos os possíveis valores de f à medida que a percorre A. Para as funções mais elementares, A e B são conjuntos de números reais e então dizemos que f é uma ***função real de uma variável real***. Outras funções comuns ocorrem quando B é um conjunto de números reais e A é um conjunto de vetores em R^2 ou R^3 ou, mais geralmente, em R^n. Alguns exemplos são dados na Tabela 1, a seguir.

Duas funções f_1 e f_2 são consideradas ***iguais*** e escrevemos $f_1 = f_2$ se ambas têm o mesmo domínio e $f_1(a) = f_2(a)$ para qualquer a do domínio.

Funções de R^n em R^m Se o domínio de uma função f é R^n e o contradomínio é R^m, então escrevemos $f : R^n \to R^m$ e f é chamada uma ***aplicação*** ou ***transformação*** de R^n em R^m ; neste caso, dizemos que a função ***leva*** ou ***aplica*** R^n em R^m. As funções da Tabela 1 são transformações para as quais $m = 1$. No caso em que $m = n$, a transformação $f : R^n \to R^m$ é chamada um ***operador*** de R^n. A primeira entrada na Tabela 1 é um operador de R.

Para ilustrar uma maneira importante pela qual podemos construir transformações, suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são funções reais de n variáveis reais, digamos

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Estas m equações associam um único ponto $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ em R^m a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n e portanto definem uma transformação de R^n em R^m. Denotando esta transformação por T, temos $T : R^n \to R^m$ com

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

EXEMPLO 1 Uma Transformação de R^2 em R^3

As equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

definem uma transformação $T : R^2 \to R^3$. A imagem do ponto

TABELA 1

Fórmula	Exemplo	Classificação	Descrição
$f(x)$	$f(x) = x^2$	Função real de uma variável real	Função de R em R
$f(x, y)$	$f(x, y) = x^2 + y^2$	Função real de duas variáveis reais	Função de R^2 em R
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	Função real de três variáveis reais	Função de R^3 em R
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$	Função real de n variáveis reais	Função de R^n em R

(x_1, x_2) por esta transformação é o ponto

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)$$

Assim, por exemplo, $T(1, -2) = (-1, -6, -3)$. ♦

Transformações Lineares de R^n em R^m No caso especial em que as equações em (1) são lineares, a transformação $T : R^n \to R^m$ definida por estas equações é chamada uma ***transformação linear*** (ou um ***operador linear*** se $m = n$). Assim, uma transformação linear $T : R^n \to R^m$ é definida por equações da forma

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{2}$$

ou então, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

ou, mais concisamente, por

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

A matriz $A = [\, a_{ij} \,]$ é chamada a ***matriz canônica*** da transformação linear T e a transformação T é chamada ***multiplicação por A***.

EXEMPLO 2 Uma Transformação de R^4 em R^3

A transformação linear $T : R^4 \to R^3$ definida pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned} \tag{5}$$

pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem de um ponto (x_1, x_2, x_3, x_4) pode ser calculada diretamente das equações definidoras (5) ou da matriz (6) por multiplicação matricial. Por exemplo, se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$ então, substituindo em (5), obtemos

$$w_1 = 1,\ w_2 = 3,\ w_3 = 8$$

(verifique) ou então, alternativamente, por (6) obtemos

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$ ♦

Algumas Questões de Notação Se $T : R^n \to R^m$ é a multiplicação por A e se é importante enfatizar que A é a matriz canônica de T, nós escreveremos a transformação linear $T : R^n \to R^m$ como $T_A : R^n \to R^m$. Assim,

$$T_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} \tag{7}$$

Nesta equação deve ficar claro que entendemos o vetor $\mathbf{x}$ em R^n como uma matriz-coluna.

Às vezes é impraticável introduzir mais uma letra para denotar a matriz canônica de uma transformação linear $T : R^n \to R^m$. Nestes casos nós denotaremos a matriz canônica de T pelo símbolo $[T]$. Com esta notação, a Equação (7) assume a forma

$$T(\mathbf{x}) = [T]\,\mathbf{x} \tag{8}$$

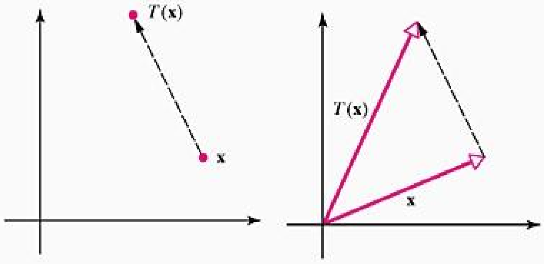
Ocasionalmente, misturamos as duas notações para a matriz canônica, quando então teremos

$$[T_A] = A \tag{9}$$

OBSERVAÇÃO. No meio de toda esta notação é importante não esquecer que nós estabelecemos uma correspondência entre as matrizes $m \times n$ e as transformações lineares de R^n em R^m: A cada matriz A corresponde uma transformação linear T_A (multiplicação por A) e a cada transformação linear $T : R^n \to R^m$ corresponde uma matriz $[T]$ de tamanho $m \times n$ (a matriz canônica de T).

A Geometria das Transformações Lineares

Dependendo de como encaramos uma n–upla, se como um ponto ou um vetor, o efeito geométrico de um operador $T : R^n \to R^n$ é o de transformar cada ponto (ou vetor) de R^n em algum novo ponto (ou vetor) (Figura 4.2.1).



(*a*) T leva pontos em pontos (*b*) T leva vetores em vetores

Figura 4.2.1

EXEMPLO 3 A Transformação Nula de R^n em R^m

Se 0 é a matriz zero $m \times n$ e se $\mathbf{0}$ é o vetor nulo de R^m então, para cada vetor $\mathbf{x}$ em R^n temos

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

de modo que a multiplicação por zero leva cada vetor em R^n no vetor nulo de R^m. Nós chamamos T_0 a **transformação nula** ou **zero** de R^n em R^m. Às vezes a transformação nula é denotada por 0. Embora isto seja a mesma notação usada para a matriz zero, a interpretação correta fica, geralmente, clara pelo contexto. ♦

EXEMPLO 4 O Operador Identidade de R^n

Se I é a matriz identidade $n \times n$, então, para cada vetor $\mathbf{x}$ em R^n temos

$$T_I(\mathbf{x}) = I\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

de modo que a multiplicação por I leva cada vetor em R^n em si mesmo. Nós chamamos T_I o **operador identidade** de R^n. Às vezes o operador identidade é denotado por I. Embora isto seja a mesma notação usada para a matriz identidade, a interpretação correta fica, geralmente, clara pelo contexto. ♦

Entre os operadores lineares mais importantes de R^2 e R^3 estão os que produzem reflexões, projeções e rotações. Agora nós passamos a estudar estes operadores.

Reflexões Considere o operador T: $R^2 \to R^2$ que aplica cada vetor na sua imagem simétrica em relação ao eixo y (Figura 4.2.2).

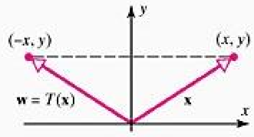


Figura 4.2.2

Se escrevermos $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$, então as equações relacionando os componentes de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{w}$ são

$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + 0y \\ w_2 &= y = 0x + y \end{aligned} \qquad (10)$$

TABELA 2

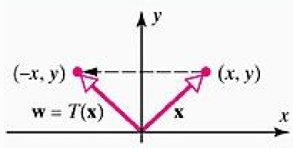
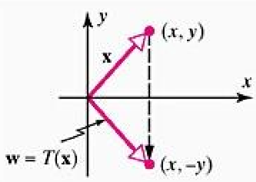
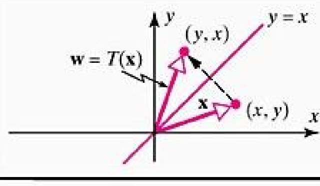
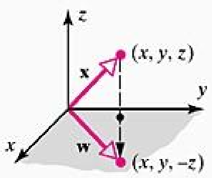
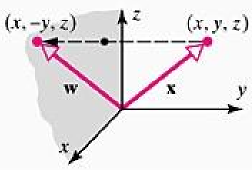
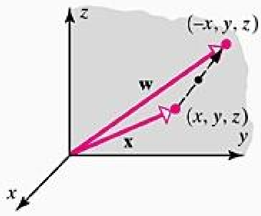
Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Reflexão em torno do eixo y		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do eixo x		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno da reta $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

TABELA 3

Operador	**Ilustração**	**Equações**	**Matriz Canônica**
Reflexão em torno do plano xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do plano xz		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do plano yz		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11}$$

Como as equações em (10) são lineares, T é um operador linear e, por (11), a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em geral, os operadores em R^2 e R^3 que levam cada vetor em seu simétrico em relação a alguma reta ou plano são chamados de ***reflexões***. Estes operadores são lineares. As Tabelas 2 e 3 listam algumas das reflexões mais comuns.

Projeções Considere o operador $T: R^2 \to R^2$ que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo x (Figura 4.2.3). As equações relacionando os componentes de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ são

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \tag{12}$$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

TABELA 4

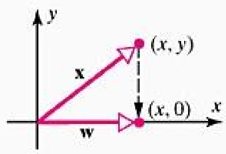
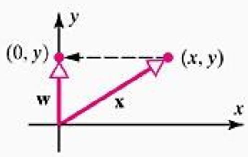
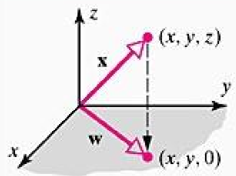
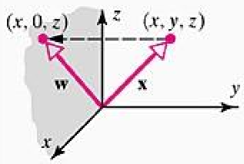
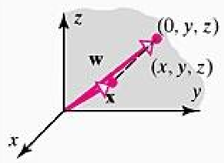
Operador	**Ilustração**	**Equações**	**Matriz Canônica**
Projeção ortogonal sobre o eixo x		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo y		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TABELA 5

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o plano xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano xz		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano yz		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

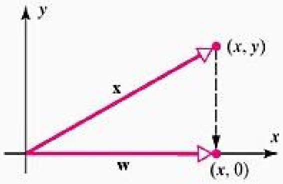


Figura 4.2.3

Como as equações em (12) são lineares, T é um operador linear e, por (13), a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em geral, uma ***projeção*** (ou, mais precisamente, uma ***projeção ortogonal***) de R^2 ou R^3 é qualquer operador que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre alguma reta ou algum plano pela origem. Pode ser mostrado que tais operadores são lineares. As Tabelas 4 e 5 listam algumas das mais básicas projeções em R^2 e R^3.

Rotações Um operador que gira cada vetor em R^2 por um ângulo fixado θ é chamado uma ***rotação em*** R^2. A Tabela 6 dá as fórmulas para as rotações de R^2. Para mostrar como derivamos estes resultados, considere o operador que gira cada vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ fixado. Para encontrar as equações relacionando **x** com **w** = T (**x**), seja ϕ o ângulo entre **x** e o eixo x positivo e seja r o comprimento comum de **x** e de **w** (Figura 4.2.4).

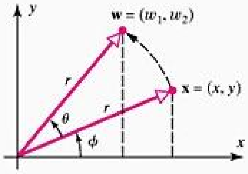


Figura 4.2.4

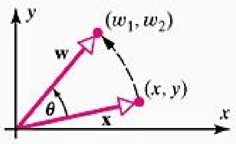
Por trigonometria básica,

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{14}$$

e

$$w_1 = r\cos(\theta + \phi), \qquad w_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta + \phi) \tag{15}$$

TABELA 6

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Rotação pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_2 = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Aplicando identidades trigonométricas a (15), resulta

$$w_1 = r\cos\theta\cos\phi - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$w_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$

e substituindo (14) resulta

$$\begin{aligned} w_1 &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ w_2 &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{16}$$

As equações em (16) são lineares, de modo que T é um operador linear; além disto, segue destas equações que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 5 Rotação

Se cada vetor em R^2 é rodado por um ângulo de $\pi/6$ (= 30°), então a imagem $\mathbf{w}$ de um vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\mathrm{sen}\,\pi/6 \\ \mathrm{sen}\,\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a imagem do vetor

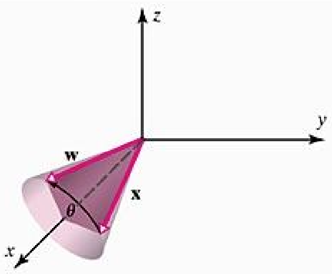
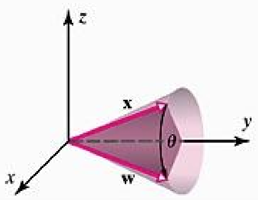
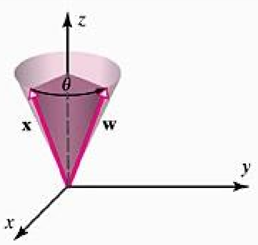
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

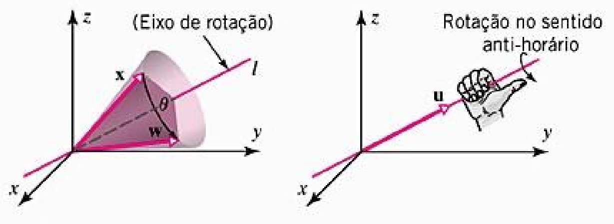
◆

Em geral descrevemos uma rotação de vetores em R^3 em relação a um raio partindo da origem, chamado o ***eixo de rotação***. À medida que um vetor gira em torno do eixo de rotação ele varre uma porção de um cone (Figura 4.2.5*a*). O ***ângulo de rotação***, que é medido na base do cone, é descrito como sendo no sentido "horário" ou "anti-horário" em relação a um ponto de vista ao longo do eixo de rotação *olhando para a origem*. Por exemplo, na Figura 4.2.5*a* o vetor $\mathbf{w}$ resulta da rotação no sentido anti-horário do vetor $\mathbf{x}$ em torno do eixo l por um ângulo de θ. Assim como em R^2, os ângulos são *positivos* se gerados por rotações no sentido anti-horário e *negativos* se gerados por rotações no sentido horário.

A maneira mais comum de descrever um eixo de rotação geral é especificando um vetor não-nulo $\mathbf{u}$ com ponto inicial na origem e apontando ao longo do eixo de rotação. O sentido anti-horário para a rotação em torno do eixo pode então ser determinado pela "regra da mão direita" (Figura 4.2.5*b*): Se o polegar da mão direita aponta na direção e sentido do vetor $\mathbf{u}$ então os dedos da mão fechada apontam no sentido anti-horário.

TABELA 7

Operador	Ilustração	Equação	Matriz Canônica
Rotação anti-horária em torno do eixo x positivo por um ângulo θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_3 = y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo y positivo por um ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo z positivo por um ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$ $w_2 = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



(*a*) Ângulo de rotação (*b*) Regra da mão direita

Figura 4.2.5

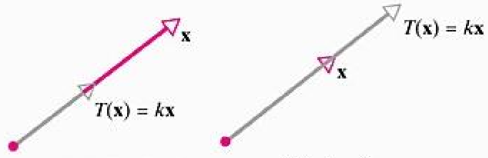
Uma ***rotação*** em R^3 é um operador linear que gira cada vetor em R^3 em torno de algum eixo de rotação por um ângulo fixado θ. Na Tabela 7 nós descrevemos as rotações em R^3 cujos eixos de rotação são os eixos coordenados positivos. Para cada uma destas rotações, um dos componentes permanece inalterado durante a rotação e a relação entre os dois outros componentes pode ser deduzida da mesma maneira que deduzimos (16). Por exemplo, na rotação em torno do eixo z, os componentes z de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ são os mesmos e os componentes x e y estão relacionados como em (16). Isto fornece as equações de rotação mostradas na última coluna da Tabela 7.

Observamos, para completar, que a matriz canônica da rotação anti-horária por um ângulo θ em torno de um eixo em R^3, determinado por um vetor arbitrário mas *unitário* $\mathbf{u} = (a, b, c)$ com ponto inicial na origem, é

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\,\mathrm{sen}\,\theta & ac(1-\cos\theta)+b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\,\mathrm{sen}\,\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\,\mathrm{sen}\,\theta & bc(1-\cos\theta)+a\,\mathrm{sen}\,\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{17}$$

A dedução desta matriz pode ser encontrada no livro intitulado *Principles of Interactive Computer Graphics*, de W. M. Newmann e R. F. Sproull, editado em 1979 pela McGraw-Hill, de Nova Iorque. O leitor pode achar instrutivo deduzir os resultados da Tabela 7 como casos especiais deste resultado mais geral.

Dilatações e Contrações Se k é um escalar não-negativo, então o operador $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$ de R^2 ou de R^3 é chamado uma ***homotetia de razão k***; especificamente, o operador é uma ***contração de razão k*** se $0 \le k \le 1$ e uma ***dilatação de razão k*** se $k \ge 1$. O efeito geométrico de uma contração é comprimir cada vetor por um fator k (Figura 4.2.6*a*) e o efeito geométrico de uma dilatação é esticar cada vetor por um fator k (Figura 4.2.6*b*). Uma contração comprime R^2 ou R^3 uniformemente de todas as direções na direção da origem e uma dilatação expande R^2 ou R^3 uniformemente em todas as direções para longe da origem.



(*a*) $0 \le k < 1$ (*b*) $k > 1$

Figura 4.2.6

A contração mais extrema ocorre com $k = 0$, caso em que $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$ reduz ao operador nulo $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, que comprime cada vetor a um único ponto (a origem). Se $k = 1$ então $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$ reduz ao operador identidade $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, que deixa cada vetor inalterado; isto poderia ser considerado tanto uma contração quanto uma dilatação. As Tabelas 8 e 9 listam as contrações e dilatações em R^2 e R^3.

Composição de Transformações Lineares Se $T_A : R^n \to R^k$ e $T_B : R^k \to R^m$ são transformações lineares então, para cada $\mathbf{x}$ em R^n nós podemos calcular, primeiro, $T_A(\mathbf{x})$, que é um vetor em R^k e depois calcular $T_B(T_A(\mathbf{x}))$, que é um vetor em R^m. Assim, a aplicação de T_A seguida de T_B produz uma transformação de R^n em R^m. Esta transformação é chamada a ***composição*** ou a ***composta*** de T_B com T_A e é denotada por $T_B \circ T_A$ (podemos ler "T_B bola T_A"). Assim,

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) \tag{18}$$

A composta $T_B \circ T_A$ é linear pois

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} \tag{19}$$

de modo que $T_B \circ T_A$ é a multiplicação por BA, que é uma transformação linear. A Fórmula (19) também nos diz que a matriz canônica de $T_B \circ T_A$ é BA. Isto pode ser dito pela fórmula

$$T_B \circ T_A = T_{BA} \tag{20}$$

OBSERVAÇÃO. A Fórmula (20) captura uma idéia importante: *Multiplicar matrizes é equivalente a compor as correspondentes*

TABELA 8

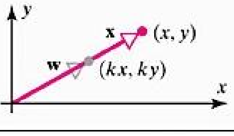
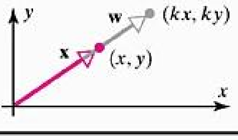
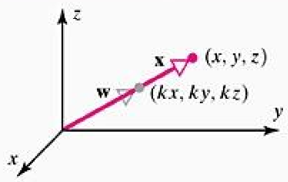
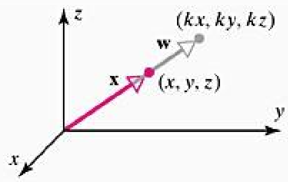
Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Contração de fator k em R^2 $(0 \le k \le 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator k em R^2 $(k \ge 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

TABELA 9

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Contração de fator k em R^3 $(0 \leq k \leq 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator k em R^3 $(k \geq 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	

transformações lineares, formando os fatores da direita para a esquerda.

Existe uma forma alternativa para a Fórmula (20): Se $T_1 : R^n \to R^k$ e $T_2 : R^k \to R^m$ são transformações lineares, então temos

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] \tag{21}$$

pois a matriz canônica da composta $T_2 \circ T_1$ é o produto das matrizes canônicas de T_2 e de T_1.

EXEMPLO 6 Composição de Duas Rotações

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ operadores lineares que rodam os vetores por ângulos θ_1 e θ_2, respectivamente. Assim, a operação

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

primeiro roda $\mathbf{x}$ por um ângulo θ_1 e então roda $T_1(\mathbf{x})$ por um ângulo θ_2. Segue-se que o efeito líquido de $T_2 \circ T_1$ é rodar cada vetor em R^2 por um ângulo $\theta_1 + \theta_2$ (Figura 4.2.7).

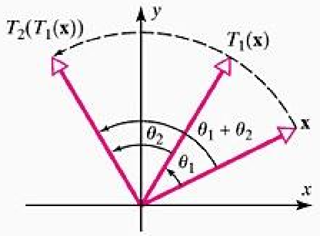


Figura 4.2.7

Assim, as matrizes canônicas destes operadores lineares são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes deveriam satisfazer (21). Com a ajuda de algumas identidades trigonométricas básicas, podemos mostrar que isto realmente ocorre:

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -(\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1) \\ \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

♦

OBSERVAÇÃO. Em geral, é importante a ordem pela qual compomos transformações lineares. Isto era de se esperar, pois compor transformações lineares corresponde a multiplicar as correspondentes matrizes canônicas e nós sabemos que é relevante a ordem na qual multiplicamos matrizes.

EXEMPLO 7 A Composição não é Comutativa

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ a reflexão em torno da reta $y = x$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ a projeção ortogonal sobre o eixo y. A Figura 4.2.8 ilustra graficamente o efeito distinto que $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ têm sobre um vetor $\mathbf{x}$. Esta mesma conclusão pode ser alcançada mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 não comutam:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $[T_2 \circ T_1] \neq [T_1 \circ T_2]$. ♦

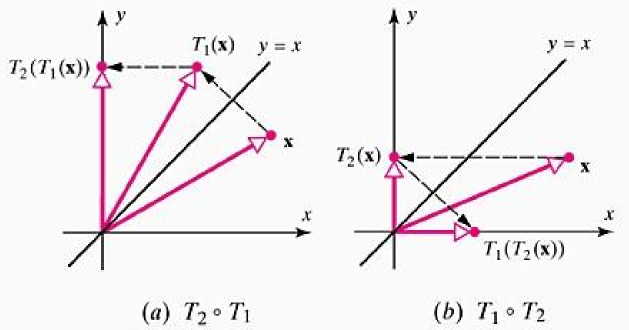


Figura 4.2.8

EXEMPLO 8 A Composição de Duas Reflexões

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ a reflexão em torno do eixo y e $T_2 : R^2 \to R^2$ a reflexão em torno do eixo x. Neste caso, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ são idênticas; ambas aplicam cada vetor $\mathbf{x} = (x, y)$ em seu negativo $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ (Figura 4.2.9):

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$
$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$

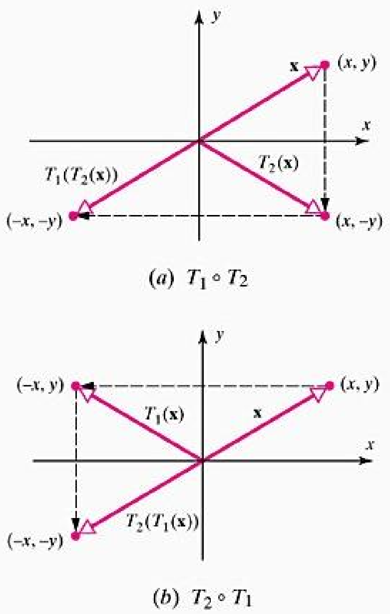


Figura 4.2.9

A igualdade de $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 comutam:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O operador $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ em R^2 ou R^3 é chamado ***reflexão em torno da origem***. Como mostram as contas acima, a matriz canônica deste operador em R^2 é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

♦

Composição de Três ou Mais Transformações Lineares A composição também pode ser definida para três ou mais transformações lineares. Por exemplo, considere as transformações lineares

$$T_1 : R^n \to R^k, \quad T_2 : R^k \to R^l, \quad T_3 : R^l \to R^m$$

Nós definimos a composta $(T_3 \circ T_2 \circ T_1): R^n \to R^m$ por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{x})))$$

Pode ser mostrado que esta composição é uma transformação linear e que a matriz canônica de $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ está relacionada com as matrizes canônicas de T_1, T_2 e T_3 por

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1] \tag{22}$$

que generaliza (21). Se as matrizes canônicas de T_1, T_2 e T_3 são denotadas por A, B e C, respectivamente, então nós também temos a seguinte generalização de (20):

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA} \tag{23}$$

EXEMPLO 9 Composição de Três Transformações

Encontre a matriz canônica do operador linear $T : R^3 \to R^3$ que primeiro roda um vetor no sentido anti-horário em torno do eixo z por um ângulo θ e depois reflete o vetor resultante em torno do plano yz e finalmente projeta este vetor ortogonalmente sobre o plano xy.

Solução.

A transformação linear T pode ser expressa como a composição

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

onde T_1 é a rotação em torno do eixo z, T_2 é a reflexão em torno do plano yz e T_3 é a projeção ortogonal sobre o plano xy. As matrizes canônicas destas transformações lineares, pelas Tabelas 3, 5 e 7, são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, por (22), a matriz canônica de T é $[T] = [T_3]\,[T_2]\,[T_1]$; ou seja,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

♦

Conjunto de Exercícios 4.2

1. Encontre o domínio e o contradomínio das transformações definidas pelas equações dadas e determine se a transformação é linear.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \end{aligned}$

2. Encontre a matriz canônica da transformação linear definida pelas equações.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 \\ w_2 &= 3x_1 + 5x_2 - x_4 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ w_2 &= \quad - x_2 + 5x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + 7x_2 - x_3 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 - 2x_2 \\ w_3 &= 5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 \\ w_2 &= x_1 + x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ w_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$

3. Encontre a matriz canônica da transformação linear $T : R^3 \to R^3$ dada por

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

e em seguida calcule $T(-1, 2, 4)$ por substituição direta nas equações e também por multiplicação matricial.

4. Encontre a matriz canônica do operador linear T definido pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ (b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$ (d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

5. Encontre a matriz canônica do operador linear T definido pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

6. Em cada parte é dada a matriz canônica $[T]$ de uma transformação linear T. Use a matriz para obter $T(\mathbf{x})$. [Expresse as repostas em formato matricial.]

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

7. Em cada parte use a matriz canônica $[T]$ para obter $T(\mathbf{x})$; em seguida, confira seu resultado calculando $T(\mathbf{x})$ diretamente.

(a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

8. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(-1, 2)$ em torno
(a) do eixo x (b) do eixo y (c) da reta $y = x$

9. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(2, -5, 3)$ em torno do
(a) plano xy (b) plano xz (c) plano yz

10. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(2, -5)$ sobre o
(a) eixo x (b) eixo y

11. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o
(a) plano xy (b) plano xz (c) plano yz

12. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(3, -4)$ quando for girado por um ângulo de
(a) $\theta = 30°$ (b) $\theta = -60°$ (c) $\theta = 45°$ (d) $\theta = 90°$

13. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ quando for girado por
(a) 30° em torno do eixo x
(b) 45° em torno do eixo y
(c) 90° em torno do eixo z

14. Encontre a matriz canônica do operador linear que roda um vetor em R^3 por um ângulo de $-60°$ em torno do
(a) eixo x (b) eixo y (c) eixo z

15. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ quando for girado por
(a) $-30°$ em torno do eixo x

(b) – 45° em torno do eixo y
(c) – 90° em torno do eixo z

16. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de R^2.
(a) Uma rotação de 90° seguida de uma reflexão em torno da reta $y = x$.
(b) Uma projeção ortogonal sobre o eixo y seguida de uma contração de razão $k = \frac{1}{2}$.
(c) Uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma dilatação de razão $k = 3$.

17. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de R^2.
(a) Uma rotação de 60°, seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo x, seguida de uma reflexão em torno da reta $y = x$.
(b) Uma dilatação de razão $k = 2$, seguida de uma rotação de 45°, seguida de uma reflexão em torno do eixo y.
(c) Uma rotação de 15°, seguida de uma rotação de 105°, seguida de uma rotação de 60°.

18. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de R^3.
(a) Uma reflexão em torno do plano yz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano xz.
(b) Uma rotação de 45° em torno do eixo y, seguida de uma dilatação de razão $k = \sqrt{2}$.
(c) Uma projeção ortogonal sobre o plano xy, seguida de uma reflexão em torno do plano yz.

19. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de R^3.
(a) Uma rotação de 30° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 30° em torno do eixo z, seguida de uma contração de razão $k = \frac{1}{4}$.
(b) Uma reflexão em torno do plano xy, seguida de uma reflexão em torno do plano xz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano yz.
(c) Uma rotação de 270° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 90° em torno do eixo y, seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo z.

20. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
(a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo y.
(b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ_1 e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ_2.
(c) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ.

21. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
(a) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a dilatação de razão k e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.
(b) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo x por um ângulo θ_1 e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ_2.

22. Definimos as ***projeções ortogonais*** de R^3 sobre os eixos x, y e z, respectivamente, por

$$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \qquad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \qquad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

(a) Mostre que as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados são operadores lineares e encontre suas matrizes canônicas.
(b) Mostre que se $T : R^3 \to R^3$ é uma projeção ortogonal sobre um dos eixos coordenados, então os vetores $T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ são vetores ortogonais, para cada vetor $\mathbf{x}$ em R^3.
(c) Faça um esboço indicando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ no caso em que T é a projeção ortogonal sobre o eixo x.

23. Deduza as matrizes canônicas para as rotações em torno do eixo x, do eixo y e do eixo z de R^3 a partir da Fórmula (17).

24. Use a Fórmula (17) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de 90° em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. [***Observação.*** A Fórmula (17) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

25. Verifique a Fórmula (21) para as transformações lineares dadas.
(a) $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ e $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$
(b) $T_1(x_1, x_2) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ e $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 4x_1 - x_3)$
(c) $T_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, -x_2 + x_3, -x_3 + x_1)$ e $T_2(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, 3x_3, -4x_2)$

26. Pode ser provado que se A é uma matriz 2×2 com $\det(A) = 1$ e tal que os vetores-coluna de A são ortogonais e têm comprimento 1, então a multiplicação por A é a rotação por algum ângulo θ. Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições enunciadas e encontre o ângulo de rotação.

27. O resultado enunciado no Exercício 26 também vale em R^3: Pode ser provado que se A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 1$ e tal que os vetores-coluna de A são dois a dois ortogonais e têm comprimento 1, então a multiplicação por A é a rotação em torno de algum eixo de rotação por algum ângulo θ. Use a Fórmula (17) para mostrar que se A satisfaz as condições enunciadas, então o ângulo de rotação satisfaz a equação

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 (não a identidade) que satisfaz as condições enunciadas no Exercício 27. Pode ser mostrado que se $\mathbf{x}$ é um vetor não-nulo qualquer em R^3 então o vetor $\mathbf{u} = A\,\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \operatorname{tr}(A)]\,\mathbf{x}$ determina um eixo de rotação quando $\mathbf{u}$ é posicionado com seu ponto inicial na origem. [Ver o artigo *The Axis of Rotation: Analysis, Algebra, Geometry*, por Dan Kalman, em *Mathematics Magazine*, Vol. 62, No. 4, Outubro de 1989.]
(a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

(b) Encontre um vetor de comprimento 1 que define um eixo da rotação.

(c) Use o resultado do Exercício 27 para encontrar o ângulo de rotação em torno do eixo obtido na parte (b).

Discussão e Descoberta

29. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor **x** pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

30. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor **x** pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

31. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor **x** pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

32. Se a multiplicação por A roda um vetor **x** do plano xy por um ângulo θ, qual é o efeito de multiplicar **x** por A^T? Explique seu raciocínio.

4.3 PROPRIEDADES DAS TRANSFOMAÇÕES LINEARES DE R^n EM R^m

Nesta seção nós vamos investigar a relação entre a invertibilidade de uma matriz e propriedades das correspondentes transformações matriciais. Nós também iremos obter uma caracterização das transformações lineares de R^n em R^m que será a base para as transformações lineares mais gerais que serão abordadas em seções subseqüentes e discutiremos algumas propriedades geométricas dos autovetores.

Transformações Lineares Injetoras As transformações lineares que aplicam vetores (pontos) distintos em vetores (pontos) distintos são de especial importância. Um exemplo de uma tal transformação é o operador linear $T: R^2 \to R^2$ que roda cada vetor por um ângulo θ. É obvio, geometricamente, que se **u** e **v** são vetores distintos em R^2 então também os vetores girados $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ são distintos (Figura 4.3.1).

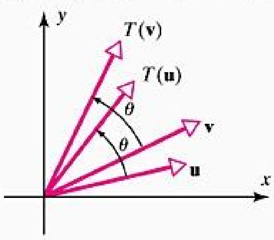


Figura 4.3.1 Os vetores distintos **u** e **v** são girados em vetores distintos $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$.

Contrastando com este efeito, se $T: R^3 \to R^3$ é a projeção ortogonal de R^3 sobre o plano xy, então pontos distintos na mesma reta vertical são levados num mesmo ponto do plano xy (Figura 4.3.2).

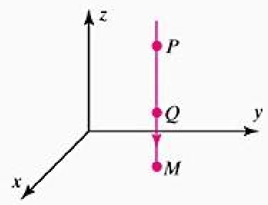


Figura 4.3.2 Os pontos distintos P e Q são levados no mesmo ponto M.

Definição

Uma tranformação linear $T: R^n - R^m$ é dita ***injetora*** se T aplica vetores (pontos) distintos de R^n em vetores (pontos) distintos de R^m.

OBSERVAÇÃO. Segue desta definição que para cada vetor **w** na imagem de uma transformação linear injetora T existe exatamente um único vetor **x** tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$.

Na terminologia da definição que acabamos de dar, a rotação da Figura 4.3.1 é injetora mas a projeção ortogonal da Figura 4.3.2 não o é. ♦

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $T_A: R^n \to R^n$ a multiplicação por A. Agora vamos investigar as relações entre a invertibilidade de A e propriedades de T_A.

Lembre do Teorema 2.3.6 (com **w** no lugar de **b**) que as seguintes afirmações são equivalentes:

- A é invertível.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ é consistente para cada matriz $n \times 1$ **w**.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução para cada matriz $n \times 1$ **w**.

No entanto, a última destas afirmações é mais forte do que é necessário. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes (Exercício 24):

- A é invertível.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ é consistente para cada matriz $n \times 1$ **w**.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução quando o sistema é consistente.

Transladando estas afirmações para o contexto do operador linear T_A, deduzimos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- A é invertível.
- Para cada vetor **w** em R^n existe um vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$. Dito de outra forma, a imagem de T_A é todo R^n.
- Para cada vetor **w** da imagem de T_A, existe exatamente um vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$. Dito de outra forma, T_A é injetora.

Resumindo, estabelecemos o seguinte teorema sobre operadores lineares de R^n.

Teorema 4.3.1 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ e $T_A : R^n \to R^n$ é a multiplicação por A, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A é invertível.
(b) A imagem de T_A é R^n.
(c) T_A é injetora.

EXEMPLO 2 Aplicando o Teorema 4.3.1

No Exemplo 1 nós observamos que a rotação $T: R^2 \to R^2$ ilustrada na Figura 4.3.1 é injetora. Segue pelo Teorema 4.3.1 que a imagem de T deve ser todo o R^2 e que a matriz canônica de T deve ser invertível. Para mostrar que a imagem de T é todo o R^2, nós devemos mostrar que cada vetor **w** em R^2 é a imagem de algum vetor **x** por T. Mas isto claramente ocorre, pois o vetor **x** obtido girando **w** por um ângulo de $-\theta$ é levado em **w** quando girado por um ângulo θ. Além disto, pela Tabela 6 da Seção 4.2, a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

que é invertível, pois

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0$$ ♦

EXEMPLO 3 Aplicando o Teorema 4.3.1

No Exemplo 1 nós observamos que a projeção $T : R^3 \to R^3$ ilustrada na Figura 4.3.1 não é injetora. Segue pelo Teorema 4.3.1 que a imagem de T *não* pode ser todo o R^3 e que a matriz canônica de T é não-invertível. Para mostrar que a imagem de T não é todo o R^3, nós devemos encontrar um vetor **w** em R^3 que não é imagem por T de nenhum vetor **x.** Mas qualquer vetor **w** fora do plano xy tem esta propriedade, pois todas as imagens por T estão no plano xy. Além disto, pela Tabela 5 da Seção 4.2, a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que não é invertível, pois $\det[T] = 0$. ♦

Inversa de um Operador Injetor Se $T_A: R^n \to R^n$ é um operador linear injetor, então a matriz A é invertível pelo Teorema 4.3.1. Assim, $T_{A^{-1}}: R^n \to R^n$ também é um operador linear, chamado ***inverso de T_A***. Os operadores lineares T_A e $T_{A^{-1}}$ cancelam-se mutuamente, no seguinte sentido: para todo **x** de R^n

$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$
$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

ou, equivalentemente,

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$
$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$

De um ponto de vista mais geométrico, se **w** é a imagem de **x** por T_A, então $T_{A^{-1}}$ leva **w** de volta em **x**, pois

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

(Figura 4.3.3).

Antes de passar a um exemplo, é útil mencionar um assunto de notação. Quando um operador linear injetor em R^n é escrito como $T : R^n \to R^n$ (em vez de $T_A : R^n \to R^n$), então o operador inverso de T é denotado por T^{-1} (em vez de $T_{A^{-1}}$). Como a matriz canônica de T^{-1} é a inversa da matriz canônica de T, temos

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} \tag{1}$$

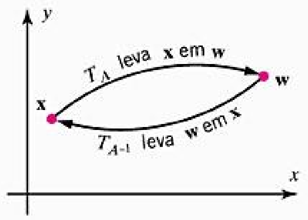


Figura 4.3.3

EXEMPLO 4 A Matriz Canônica de T^{-1}

Seja T: $R^2 \to R^2$ o operador que gira cada vetor de R^2 por um ângulo de θ; pela Tabela 6 da Seção 4.2,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

É geometricamente evidente que para desfazer o efeito de T nós devemos girar cada vetor de R^2 por um ângulo de $-\theta$. Ocorre que isto é exatamente o que o operador T^{-1} faz, pois a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

(verifique), que é idêntica a (2) exceto que θ é trocado por $-\theta$. ♦

EXEMPLO 5 Encontrando T^{-1}

Mostre que o operador linear T: $R^2 \to R^2$ definido pelas equações

$$w_1 = 2x_1 + x_2$$
$$w_2 = 3x_1 + 4x_2$$

é injetor e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

Solução.

A forma matricial destas equações é

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é invertível (e portanto T é injetor) e a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

pelo que concluímos que

$$T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2, -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2\right)$$ ♦

Propriedades da Linearidade Na seção precedente nós definimos uma transformação $T : R^n \to R^m$ como sendo linear se as equações relacionando $\mathbf{x}$ com $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ são equações lineares. O teorema a seguir dá uma caracterização alternativa da linearidade. Este teorema é fundamental e será a base para estender, mais adiante neste texto, o conceito de transformação linear para contextos mais gerais.

> **Teorema 4.3.2 Propriedades de Transformações Lineares**
>
> *Uma transformação T: $R^n \to R^m$ é linear se, e somente se, as seguintes relações valem para todos os vetores* **u** *e* **v** *em R^n e qualquer escalar c.*
>
> (*a*) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ (*b*) $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$

Prova. Suponha primeiro que T é uma transformação linear e seja A a matriz canônica de T. Pelas propriedades aritméticas básicas de matrizes segue que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

e

$$T(c\mathbf{v}) = A(c\mathbf{v}) = cA(\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

Reciprocamente, suponha que as propriedades (*a*) e (*b*) valem para a transformação T. Nós podemos provar que T é linear encontrando uma matriz A tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{3}$$

para cada vetor $\mathbf{x}$ em R^n. Isto mostrará que T é a multiplicação por A e portanto é linear. Antes de encontrar uma tal matriz A nós precisamos observar que a propriedade (*a*) pode ser estendida a três ou mais parcelas; por exemplo, se **u**, **v** e **w** são vetores quaisquer em R^n, então agrupando primeiro **v** e **w** e aplicando a propriedade (*a*), nós obtemos

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$$

Mais geralmente, dados quaisquer vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ em R^n, temos

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) + \cdots + T(\mathbf{v}_k)$$

Para encontrar a matriz A, sejam $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ os vetores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

e seja A a matriz cujas colunas sucessivas são $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, …, $T(\mathbf{e}_n)$; ou seja,

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] \tag{5}$$

Se

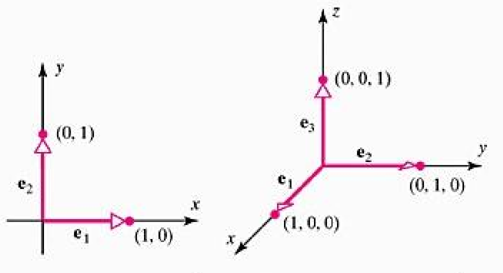
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é um vetor qualquer em R^n então, como vimos na Seção 1.3, o produto $A\mathbf{x}$ é uma combinação linear dos vetores-coluna de A com coeficientes vindo de $\mathbf{x}$, de modo que

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1) + T(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + T(x_n\mathbf{e}_n) && \longleftarrow \text{Propriedade } (b) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) && \longleftarrow \text{Propriedade } (a) \text{ para } n \text{ parcelas} \\ &= T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

A expressão em (5) é individualmente importante pois fornece uma fórmula explícita para a matriz canônica de uma transformação linear T: $R^n \to R^m$ em termos das imagens dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ por T. Por razões que serão discutidas adiante, os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de (4) são chamados vetores da ***base canônica*** de R^n. Em R^2 e R^3 estes são os vetores de comprimento 1 ao longo dos eixos coordenados (Figura 4.3.4).



(*a*) A base canônica de R^2 (*b*) A base canônica de R^3
Figura 4.3.4

Por causa de sua importância e para referência futura, vamos enunciar (5) como um teorema.

Teorema 4.3.3

Se $T: R^n \to R^m$ é uma transformação linear e $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ são os vetores da base canônica de R^n, então

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] \tag{6}$$

é a matriz canônica de T.

A Fórmula (6) é uma ferramenta poderosa para encontrar matrizes canônicas e para analisar o efeito geométrico de uma transformação linear. Por exemplo, suponha que T: $R^3 \to R^3$ é a projeção ortogonal sobre o plano xy. Olhando para a Figura 4.3.4, é geometricamente evidente que

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que, por (6),

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que concorda com o resultado da Tabela 5 da Seção 4.2.

Usando (6) de uma outra maneira, suponha que $T_A: R^3 \to R^2$ é a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

As imagens dos vetores da base canônica podem ser lidas diretamente das colunas da matriz A:

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 6 A Matriz Canônica de uma Projeção

Seja l a reta do plano xy que passa pela origem e faz um ângulo θ com o eixo x positivo, com $0 \le \theta < \pi$. Conforme está ilustrado na Figura 4.3.5*a*, seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre l.

(a) Encontre a matriz canônica de T.
(b) Encontre a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ sobre a reta pela origem que faz um ângulo $\theta = \pi / 6$ com o eixo x positivo.

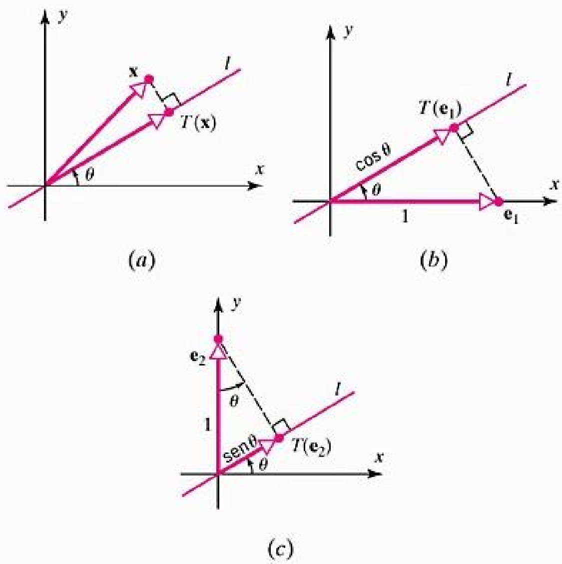


Figura 4.3.5

Solução (a). Por (6),

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)]$$

onde $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são os vetores da base canônica de R^2. Nós consideramos o caso $0 \le \theta \le \pi / 2$; o caso $\pi / 2 < \theta < \pi$ é similar. Olhando para a Figura 4.3.5*b*, vemos que $\|T(\mathbf{e}_1)\| = \cos\theta$, de modo que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \|T(\mathbf{e}_1)\| \cos\theta \\ \|T(\mathbf{e}_1)\| \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

e olhando para a Figura 4.3.5*c*, vemos que $\|T(\mathbf{e}_2)\| = \operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \|T(\mathbf{e}_2)\| \cos\theta \\ \|T(\mathbf{e}_2)\| \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz canônica de T é

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta\end{bmatrix}$$

Solução (b). Como sen $\pi/6 = 1/2$ e cos $\pi/6 = \sqrt{3}/2$, segue da parte (a) que a matriz canônica desta projeção é

$$[T]=\begin{bmatrix}3/4 & \sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

Assim,

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3/4 & \sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3+5\sqrt{3}}{4}\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}+5}{4}\end{bmatrix}$$

ou, em notação horizontal,

$$T(1,5)=\left(\frac{3+5\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}+5}{4}\right)$$

♦

Interpretação Geométrica dos Autovetores

Lembre que na Seção 2.3 vimos que se A é uma matriz $n \times n$ então λ é chamado um *autovalor* de A se existe um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Os vetores não-nulos $\mathbf{x}$ satisfazendo a equação são chamados *autovetores* de A associados a λ.

Autovalores e os autovetores também podem ser definidos para operadores em R^n; as definições são similares às relembradas para matrizes.

Definição

Se $T: R^n \to R^n$ é um operador linear, então um escalar λ é chamado um ***autovalor de T*** se existe um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ em R^n tal que

$$T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \qquad (7)$$

Os vetores não-nulos $\mathbf{x}$ que satisfazem esta equação são chamados os ***autovetores de T associados a λ***.

Observe que se A é a matriz canônica de T, então (7) pode ser reescrito como

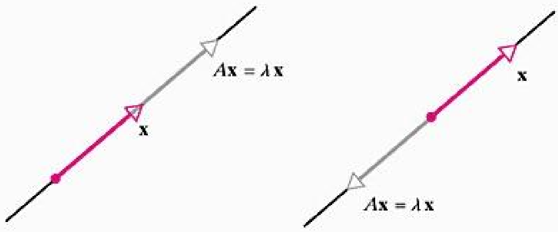
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

e obtemos:

- Os autovalores de T são precisamente os autovalores de sua matriz canônica A.
- $\mathbf{x}$ é um autovetor de T associado a λ se, e somente se, $\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ.

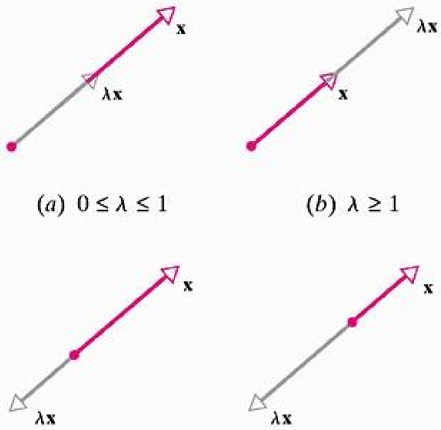
Se λ é um autovalor de A e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado, então $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, de modo que a multiplicação por A leva $\mathbf{x}$ em um múltiplo escalar de si mesmo. Em R^2 e R^3 isto significa que *a multiplicação por A leva cada autovetor* $\mathbf{x}$ *em um vetor que está na mesma reta que* $\mathbf{x}$ (Figura 4.3.6).

Lembre que na Seção 4.2 vimos que se $\lambda \geq 0$, então o operador linear $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comprime $\mathbf{x}$ por um fator λ se $0 \leq \lambda \leq 1$ ou estica $\mathbf{x}$ por um fator λ se $\lambda \geq 1$. Se $\lambda < 0$, então $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ inverte a direção de $\mathbf{x}$ e comprime o vetor invertido por um fator $|\lambda|$ se $0 \leq |\lambda| \leq 1$ ou estica o vetor invertido por um fator $|\lambda|$ se $|\lambda| \geq 1$ (Figura 4.3.7).



(a) $\lambda \geq 0$ (b) $\lambda \leq 0$

Figura 4.3.6



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$

(c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

Figura 4.3.7

EXEMPLO 7 Autovalores de um Operador Linear

Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear que gira cada vetor por um ângulo θ. É geometricamente evidente que, a menos que θ seja um múltiplo de π, T não aplica nenhum vetor não-nulo $\mathbf{x}$ na mesma reta que contém $\mathbf{x}$; conseqüentemente, T não tem autovalores reais. No entanto, se θ *é* um múltiplo de π então cada vetor não-nulo $\mathbf{x}$ é levado na mesma reta que contém $\mathbf{x}$, de modo que *cada* vetor não-nulo é um autovetor de T. Vamos verificar algebricamente estas observações geométricas. A matriz canônica de T é

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Como foi visto na Seção 2.3, os autovalores desta matriz são soluções da equação característica

$$\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=0$$

ou seja,

$$(\lambda - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 0 \tag{8}$$

No entanto, se θ não é um múltiplo de π, então $\operatorname{sen}^2\theta > 0$, de modo que esta equação não tem solução real para λ e conseqüentemente A não tem autovalores reais.[1] Se θ é um múltiplo de π, então $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1$, dependendo do particular múltiplo de π. No caso em que $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$, a equação característica (8) é dada por $(\lambda - 1)^2 = 0$ e portanto $\lambda = 1$ é o único autovalor de A. Neste caso, a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim, para cada $\mathbf{x}$ em R^2,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

e portanto T aplica cada vetor em si mesmo e portanto na mesma reta. No caso em que $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = -1$, a equação característica (8) é dada por $(\lambda + 1)^2 = 0$ e portanto $\lambda = -1$ é o único autovalor de A. Neste caso, a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Assim, para cada $\mathbf{x}$ em R^2,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = -I\mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

e portanto T aplica cada vetor em seu negativo e portanto na mesma reta. ♦

EXEMPLO 8 Autovalores de um Operador Linear

Seja $T: R^3 \to R^3$ a projeção ortogonal sobre o plano xy. Os vetores do plano xy são levados em si mesmos por T, de modo que cada vetor não-nulo do plano xy é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$. T aplica cada vetor $\mathbf{x}$ ao longo do eixo z em $\mathbf{0}$, que está na mesma reta que $\mathbf{x}$, de modo que cada vetor não-nulo no eixo z é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$. Vetores que não estão no plano xy ou no eixo z não são aplicados em múltiplos escalares deles mesmos e portanto não há outros autovetores ou autovalores.

Para verificar algebricamente estas observações geométricas, lembre que pela Tabela 5 da Seção 4.2 a matriz canônica de T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 1)^2\lambda = 0$$

que tem as soluções $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ antecipadas acima.

Como foi visto na Seção 2.3, os autovalores da matriz A associados a um autovalor λ são as soluções não-nulas de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Se $\lambda = 0$, este sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem as soluções $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ (verifique) ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Como antecipamos, estes são os vetores ao longo do eixo z. Se $\lambda = 1$, então o sistema (9) é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem as soluções $x_1 = s$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$ (verifique) ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como antecipamos, estes são os vetores do plano xy. ♦

Resumo No Teorema 2.3.6 nós listamos seis resultados que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz A. Nós concluímos esta seção juntando o Teorema 4.3.1 àquela lista para obter o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

Teorema 4.3.4 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ e se $T_A : R^n \to R^n$ é a multiplicação por A, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *admite somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(*d*) *A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.*
(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(*g*) $\det(A) \neq 0$.
(*h*) *A imagem de T_A é o R^n.*
(*i*) *T_A é injetora.*

[1] Existem aplicações que requerem o uso de escalares complexos e de vetores de componentes complexos. Nestes casos são permitidos autovalores complexos e autovetores de componentes complexos que, não obstante, não têm relevância geométrica imediata para o nosso caso. Em capítulos posteriores nós iremos discutir tais autovalores e autovetores mas, até menção explícita em contrário, nós consideraremos somente autovalores reais e autovetores de componentes reais.

Conjunto de Exercícios 4.3

1. Determine, por inspeção, se o operador linear é injetor.
   (a) uma projeção ortogonal sobre o eixo x em R^2
   (b) uma reflexão em torno do eixo y em R^2
   (c) uma reflexão em torno da reta $y = x$ em R^2
   (d) uma contração de razão $k > 0$ em R^2
   (e) uma rotação em torno do eixo z em R^3
   (f) uma reflexão em torno do plano xy em R^3
   (g) uma dilatação de razão $k > 0$ em R^3
2. Encontre a matriz canônica do operador linear definido pelas equações e use o Teorema 4.3.4 para determinar se o operador é injetor.
   (a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 + 8x_3 \end{aligned}$
3. Mostre que a imagem do operador linear definido pelas equações
$$\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 2x_2 \\ w_2 &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$
   não é todo o R^2 e encontre um vetor que não está na imagem.
4. Mostre que a imagem do operador linear definido pelas equações
$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$
   não é todo o R^3 e encontre um vetor que não está na imagem.
5. Determine se o operador linear $T: R^2 \to R^2$ definido pelas equações é injetor; se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.
   (a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 6x_2 \\ w_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= -x_1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 \\ w_2 &= -5x_1 \end{aligned}$
6. Determine se o operador linear $T: R^3 \to R^3$ definido pelas equações é injetor; se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.
   (a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= -2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 4x_2 - x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ w_3 &= 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \end{aligned}$
7. Determine, por inspeção, a inversa do operador linear injetor dado.
   (a) a reflexão em torno do eixo x em R^2
   (b) a rotação por um ângulo $\pi/4$ em R^2
   (c) a dilatação de razão 3 em R^2
   (d) a reflexão em torno do plano xy em R^3
   (e) a contração de razão $\frac{1}{5}$ em R^3

Nos Exercícios 8 e 9 use o Teorema 4.3.2 para determinar se $T: R^2 \to R^2$ é um operador linear.

8. (a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (x^2, y)$ (c) $T(x, y) = (-y, x)$ (d) $T(x, y) = (x, 0)$
9. (a) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ (b) $T(x, y) = (x + 1, y)$ (c) $T(x, y) = (y, y)$ (d) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

Nos Exercícios 10 e 11 use o Teorema 4.3.2 para determinar se $T: R^3 \to R^2$ é um operador linear.

10. (a) $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$ (b) $T(x, y, z) = (1, 1)$
11. (a) $T(x, y, z) = (0, 0)$ (b) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$
12. Em cada parte use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica do operador linear a partir das imagens dos vetores da base canônica.
    (a) as reflexões em R^2 da Tabela 2 da Seção 4.2
    (b) as reflexões em R^3 da Tabela 3 da Seção 4.2
    (c) as projeções em R^2 da Tabela 4 da Seção 4.2
    (d) as projeções em R^3 da Tabela 5 da Seção 4.2
    (e) as rotações em R^2 da Tabela 6 da Seção 4.2
    (f) as homotetias em R^3 da Tabela 9 da Seção 4.2

13. Use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica de $T: R^2 \to R^2$ a partir das imagens dos vetores da base canônica.

(a) $T: R^2 \to R^2$ projeta os vetores ortogonalmente sobre o eixo x e em seguida reflete estes vetores em torno do eixo y.

(b) $T: R^2 \to R^2$ reflete os vetores em torno da reta $y = x$ e em seguida reflete estes vetores em torno do eixo x.

(c) $T: R^2 \to R^2$ dilata os vetores por um fator 3, em seguida reflete estes vetores em torno da reta $y = x$ e finalmente projeta estes vetores ortogonalmente sobre o eixo y.

14. Use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica de $T: R^3 \to R^3$ a partir das imagens dos vetores da base canônica.

(a) $T: R^3 \to R^3$ reflete os vetores em torno do plano xz e em seguida contrai estes vetores por um fator $\frac{1}{5}$.

(b) $T: R^3 \to R^3$ projeta os vetores ortogonalmente sobre o plano xz e em seguida projeta estes vetores ortogonalmente sobre o plano xy.

(c) $T: R^3 \to R^3$ reflete os vetores em torno do plano xy, em seguida reflete estes vetores em torno do plano xz e finalmente reflete estes vetores em torno do plano yz.

15. Seja $T_A: R^3 \to R^3$ a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

e sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os vetores da base canônica de R^3. Encontre os seguintes vetores por inspeção.

(a) $T_A(\mathbf{e}_1)$, $T_A(\mathbf{e}_2)$ e $T_A(\mathbf{e}_3)$

(b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

(c) $T_A(7\,\mathbf{e}_3)$

16. Determine se a multiplicação por A é uma transformação linear injetora.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

17. Use o resultado do Exemplo 6 para encontrar a projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre a reta pela origem que faz um ângulo θ com o eixo x positivo.

(a) $\mathbf{x} = (-1, 2)$; $\theta = 45°$ (b) $\mathbf{x} = (1, 0)$; $\theta = 30°$ (c) $\mathbf{x} = (1, 5)$; $\theta = 120°$

18. Use o tipo de raciocínio utilizado no Exemplo 8 para encontrar os autovalores e autovetores associados de T. Verifique suas conclusões calculando os autovalores e autovetores associados a partir da matriz canônica de T.

(a) $T: R^2 \to R^2$ é a reflexão em torno do eixo x.

(b) $T: R^2 \to R^2$ é a reflexão em torno da reta $y = x$.

(c) $T: R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x.

(d) $T: R^2 \to R^2$ é a contração de razão $\frac{1}{2}$.

19. Repita o Exercício 18 nos seguintes casos.

(a) $T: R^3 \to R^3$ é a reflexão em torno do plano yz.

(b) $T: R^3 \to R^3$ é a projeção ortogonal sobre o plano xz.

(c) $T: R^3 \to R^3$ é a dilatação de razão 2.

(d) $T: R^3 \to R^3$ é a rotação de 45° em torno do eixo z.

20. (a) Será injetora a composta de transformações lineares injetoras? Justifique sua resposta.

(b) Pode ser injetora a composta de uma transformação linear injetora com uma transformação linear que não é injetora? Permita ambas ordens de composição e justifique sua resposta.

21. Mostre que $T(x, y) = (0, 0)$ define um operador linear em R^2 mas não $T(x, y) = (1, 1)$.

22. Prove que se $T: R^n \to R^m$ é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, T leva o vetor nulo de R^n no vetor nulo de R^m.

23. Seja l a reta do plano xy que passa pela origem e que faz um ângulo θ com o eixo x positivo, onde $0 \le \theta < \pi$. Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear que reflete cada vetor em torno de l (veja figura dada).

(a) Use o método do Exemplo 6 para encontrar a matriz canônica de T.

(b) Encontre a reflexão do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ em torno da reta l pela origem que faz um ângulo de $\theta = 30°$ com o eixo x positivo.

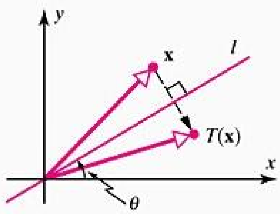


Figura Ex-23

24. Prove: Uma matriz A $n \times n$ é invertível se, e somente se, o sistema linear $A\,\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução para cada vetor $\mathbf{w}$ em R^n para o qual o sistema é consistente.

Discussão e Descoberta

25. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se T aplica R^n em R^m e se $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é linear.

(b) Se $T : R^n \to R^m$ é uma transformação linear injetora então não existem vetores distintos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n tais que $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

(c) Se $T : R^n \to R^n$ é um operador linear e se $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ para algum vetor $\mathbf{x}$, então $\lambda = 2$ é um autovalor de T.

(d) Se T aplica R^n em R^m e se $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$ para quaisquer escalares c_1 e c_2 e todos os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ de R^n, então T é linear.

26. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $\det(A) = 0$ e seja $T : R^n \to R^n$ a multiplicação por A.

(a) O que você sabe dizer sobre a imagem do operador T? Dê um exemplo que ilustra sua conclusão.

(b) O que você sabe dizer sobre o número de vetores que T aplica em $\mathbf{0}$?

Requisito: Recurso Computacional

Exercícios Computacionais do Capítulo 4

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

Seção 4.1

T1. (***Operações com vetores em R^n***) Na maioria dos recursos, os comandos para operar com vetores em R^n são os mesmos que para operar com vetores de R^2 e R^3 e o comando para calcular um produto escalar fornece o produto interno euclidiano de R^n. Use seu recurso para fazer as contas dos Exercícios 1, 3 e 9 da Seção 4.1.

Seção 4.2

T1. (***Rotações***) Encontre a matriz canônica do operador linear em R^n que efetua uma rotação anti-horária de 45° em torno do eixo x, seguida de uma rotação anti-horária de 60° em torno do eixo y, seguida de uma rotação anti-horária de 30° em torno do eixo z. Em seguida obtenha a imagem do ponto (1, 1, 1) por este operador.