Gabriel Cramer (1704–1752) foi um matemático suíço. Embora ele não seja classificado como um dos grandes matemáticos de seu tempo, mereceu seu lugar na história da Matemática pela sua contribuição como um divulgador de idéias matemáticas. Cramer viajou muito e encontrou-se com muitos dos mais importantes matemáticos de sua época.

O trabalho mais amplamente conhecido de Cramer, chamado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, de 1750, é um estudo da classificação de curvas algébricas; a regra de Cramer aparece nos apêndices. Embora a regra tenha o seu nome, variações desta regra foram formuladas antes por vários matemáticos. No entanto, a notação superior de Cramer ajudou a esclarecer e popularizar a técnica.

Excesso de trabalho combinado com uma queda de uma carruagem levaram à sua morte aos 48 anos de idade. Aparentemente, Cramer foi uma pessoa boa e agradável, demonstrando amplos interesses. Ele escreveu sobre a filosofia da lei e do governo e sobre a história da Matemática. Ele trabalhou em repartições públicas, participou da construção de fortificações e da artilharia do governo, instruiu trabalhadores de construção sobre técnicas de restauração de catedrais e coordenou escavações de arquivos de catedrais. Cramer recebeu inúmeras honrarias por suas atividades.

Multiplicando as matrizes, resulta

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

e portanto a entrada na j-ésima linha de $\mathbf{x}$ é

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{11}$$

Seja, agora,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difere de A somente na j-ésima coluna, segue que os co-fatores das entradas $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de A_j coincidem com os co-fatores das correspondentes entradas da j-ésima coluna de A. A expansão em co-fatores de $\det(A_j)$ ao longo da j-ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

Substituindo esta expressão em (11), resulta

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$ ■

EXEMPLO 8 Usando a Regra de Cramer para Resolver um Sistema

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\; + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

♦

OBSERVAÇÃO. Para resolver um sistema de n equações lineares em n incógnitas pela regra de Cramer, é necessário calcular $n + 1$ determinantes de matrizes $n \times n$. Para sistemas com mais de três equações, a eliminação gaussiana é muito mais eficiente, pois somente requer a redução de uma matriz aumentada $n \times (n + 1)$. No entanto, a regra de Cramer dá uma fórmula para a solução se o determinante da matriz de coeficientes é não-nulo.

Conjunto de Exercícios 2.4

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre todos os menores de A.
(b) Encontre todos os co-fatores.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{13} e C_{13} (b) M_{23} e C_{23} (c) M_{22} e C_{22} (d) M_{21} e C_{21}

3. Calcule o determinante da matriz do Exercício 1 usando uma expansão de co-fatores ao longo da

(a) primeira linha (b) primeira coluna (c) segunda linha

(d) segunda coluna (e) terceira linha (f) terceira coluna

4. Para a matriz do Exemplo 1, encontre

(a) adj (A) (b) A^{-1}, usando o Teorema 2.4.2

Nos Exercícios 5–10, calcule det (A) usando uma expansão em co-fatores ao longo de alguma linha ou coluna de sua preferência.

5. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 11–14, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.

(b) Calcule A^{-1} usando o método do Exemplo 4 da Seção 1.5.

(c) Qual método envolve menos contas?

Nos Exercícios 16–21, resolva pela regra de Cramer, onde aplicável.

16. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$

22. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para todos os valores de θ; em seguida, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.

23. Use a regra de Cramer para resolverem y sem resolver em x, z e w.

$$\begin{aligned} 4x + \ y + \ z + \ w &= \ 6 \\ 3x + 7y - \ z + \ w &= \ 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + \ y + \ z + 2w &= \ 3 \end{aligned}$$

24. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema do Exercício 23.
    (a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.
    (b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.
    (c) Qual método envolve menos contas?

25. Prove que se $\det(A) = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são inteiros.

26. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas com coeficientes e constantes números inteiros. Prove que se $\det(A) = 1$, então as entradas da solução $\mathbf{x}$ são inteiros.

27. Prove que se A é uma matriz triangular inferior invertível, então A^{-1} é triangular inferior.

28. Obtenha a expansão em co-fatores listada na última linha da Fórmula (4).

29. Prove: A equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

30. Prove: Os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

31. (a) Se $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$ é uma matriz em blocos "triangular superior," onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas, então $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})$. Use este resultado para calcular $\det(A)$ para a matriz

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

    (b) Verifique sua resposta na parte (a) usando uma expansão em co-fatores para calcular $\det(A)$.

32. Prove que se A é uma matriz triangular superior e B_{ij} é a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Discussão e Descoberta

33. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante nulo? Explique seu raciocínio.

34. Seja A uma matriz com o seguinte formato:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

    Quantos valores distintos você consegue obter para $\det(A)$ substituindo os asteriscos por valores numéricos (não necessariamente todos iguais)? Explique seu raciocínio.

35. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) A adj (A) é uma matriz diagonal para cada matriz quadrada A.

(b) Em teoria, a regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema de equações lineares, embora a quantidade de contas possa ser enorme.
(c) Se A é invertível, então adj (A) também deve ser invertível.
(d) Se A tem uma linha de zeros, então adj (A) também deve ter.

Exercícios Suplementares do Capítulo 2

1. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

2. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

3. Examinando o determinante da matriz dos coeficientes, mostre que o seguinte sistema tem uma solução não-trivial se, e somente se, $\alpha = \beta$.

$$x + \quad y + \alpha z = 0$$
$$x + \quad y + \beta z = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \quad z = 0$$

4. Seja A uma matriz 3×3 tal que todas suas entradas são 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para det (A)?
5. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = a$$
$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$$
$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

e em seguida aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas similares para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

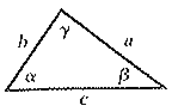

Figura Ex-5

6. Use determinantes para mostrar que, para qualquer valor de λ, a única solução de

$$x - 2y = \lambda x$$
$$x - \quad y = \lambda y$$

é $x = 0$, $y = 0$.
7. Prove: Se A é invertível, então adj (A) é invertível e

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

8. Prove: Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$.
9. (***Para leitores que estudaram Cálculo.***) Mostre que se $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são funções diferenciáveis e se

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \quad \text{então} \quad \frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

10. (a) Na figura dada, a área do triângulo $A\,B\,C$ pode ser expressa como

área $A\,B\,C$ = área $A\,D\,E\,C$ + área $C\,E\,F\,B$ − área $A\,D\,F\,B$

Use isto e o fato conhecido que a área de um trapézio é $\frac{1}{2}$ da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[*Observação.* Na dedução desta fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3), o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices (3, 3), (4, 0), (– 2, – 1).

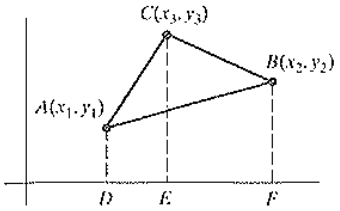

Figura Ex-10

11. Prove: Se a soma das entradas em cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é sempre zero, então o determinante de A é zero. [*Sugestão.* Considere o produto matricial AX, onde X é a matriz $n \times 1$ com todas entradas iguais a 1.]
12. Seja A uma matriz $n \times n$ e B a matriz que resulta quando as linhas de A são escritas em ordem inversa (a última linha passa a ser a primeira, e assim por diante). Qual é a relação entre $\det(A)$ e $\det(B)$?
13. Como é afetada a matriz inversa A^{-1} se
    (a) permutamos em A a i-ésima com a j-ésima linha;
    (b) a i-ésima linha de A é multiplicada por um escalar não-nulo c;
    (c) c vezes a i-ésima linha de A é somada à j-ésima linha?
14. Seja A uma matriz $n \times n$. Suponha que B_1 é obtida somando o mesmo número t a cada entrada da i-ésima linha de A e B_2 é obtida subtraindo t de cada entrada da i-ésima linha de A. Mostre que $\det(A) = \frac{1}{2}[\det(B_1) + \det(B_2)]$.
15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

    (a) Expresse $\det(\lambda I - A)$ como um polinômio $p(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$.
    (b) Expresse os coeficientes b e d em termos de determinantes e traços.
16. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

17. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19 mostre, sem calculá-lo diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

    é divisível por 19.
18. Encontre os autovalores e correspondentes autovetores para cada um dos sistemas seguintes.

(a)
$$\begin{aligned} x_2 + 9x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 - 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 - x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

Requisito: Recurso Computacional

Exercícios Computacionais do Capítulo 2

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.