Resumo No Teorema 1.6.4 nós listamos cinco resultados que são equivalentes à invertibilidade da matriz A. Nós concluímos esta seção juntando o Teorema 2.3.3 à lista para obter o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

Teorema 2.3.6 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente para cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*

(*f*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.*

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

Conjunto de Exercícios 2.3

1. Verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$ para

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

2. Verifique que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Por inspeção, explique por que $\det(A) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Use o Teorema 2.3.3 para determinar quais das seguintes matrizes são invertíveis.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det(A) = -7$, obtenha

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$ (e) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

6. Sem calcular diretamente, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sem calcular diretamente, mostre que

$$\det\begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Nos Exercícios 8–11, prove a identidade sem calcular os determinantes.

8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

12. Encontre o(s) valor(es) de k que faz(em) A não-invertível.

(a) $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13. Use o Teorema 2.3.3 para mostrar que

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para quaisquer valores de α, β e γ.

14. Expresse os seguintes sistemas lineares no formato $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -5x_1 - 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$

15. Para cada um dos sistemas do Exercício 14, encontre
(i) a equação característica;
(ii) os autovalores;
(iii) os autovetores associados a cada autovalor.

16. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se A é invertível, então $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

17. (a) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes cujas entradas não contém somas.

(b) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3+b_3 & c_3+d_3 & e_3+f_3 \end{vmatrix}$$

como uma soma de oito determinantes cujas entradas não contém somas.

18. Prove que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

19. Prove os Casos 2 e 3 do Lema 2.3.2.

Discussão e Descoberta

20. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Você já sabe, pelo que foi visto antes, que $A\,B$ e $B\,A$ não precisam coincidir. Vale o mesmo para $\det(A\,B)$ e $\det(B\,A)$? Explique seu raciocínio.
21. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Você já sabe, pelo que foi visto antes, que $A\,B$ é invertível se A e B são invertíveis. O que você sabe dizer sobre a invertibilidade de $A\,B$ se um ou ambos fatores são singulares? Explique seu raciocínio.
22. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) $\det(2A) = 2\det(A)$
    (b) $|A^2| = |A|^2$
    (c) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$
    (d) Se $\det(A) = 0$, então o sistema homogêneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.
23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) Se $\det(A) = 0$, então A pode ou pode não ser expressa como um produto de matrizes elementares.
    (b) Se a forma escalonada reduzida por linhas de A tiver uma linha de zeros, então $\det(A) = 0$.
    (c) O determinante de uma matriz permanece inalterado se escrevemos as colunas em ordem inversa.
    (d) Não existe matriz quadrada A para a qual $\det(A\,A^T) = -1$.

2.4 EXPANSÃO EM CO-FATORES; REGRA DE CRAMER

Nesta seção nós vamos considerar um método para calcular determinantes que é útil para cálculos manuais e também é importante para a teoria. Como uma conseqüência do nosso trabalho, nós vamos obter uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível, bem como uma fórmula para a solução de certos sistemas de equações lineares em termos de determinantes.

Menores e Co-fatores No Exemplo 7 da Seção 2.1 nós vimos que o determinante de uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é o número

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1)$$

Rearranjando os termos e fatorando, (1) pode ser reescrito como

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad (2)$$

As expressões destacadas em cor em (2) são, elas mesmo, determinantes:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

As submatrizes de A que aparecem nestes determinantes têm um nome especial.

Definição

Se A é uma matriz quadrada, então o ***determinante menor da entrada*** a_{ij}, ou simplesmente o ***menor de*** a_{ij}, é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é chamado o ***co-fator de*** a_{ij}.

EXEMPLO 1 **Encontrando Menores e Co-fatores**

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor de a_{11} é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O co-fator de a_{11} é

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Similarmente, o menor de a_{32} é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O co-fator de a_{32} é

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

◆

Note que a diferença entre o co-fator e o menor de um elemento a_{ij} é somente de sinal, ou seja, $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Uma maneira rápida de determinar se deve ser usado + ou − é observar que o sinal relacionando C_{ij} e M_{ij} é o que está na i-ésima linha e j-ésima coluna do arranjo em forma de tabuleiro de xadrez

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por exemplo, $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = M_{22}$ e assim por diante.

Expansão em Co-fatores Tendo em vista a definição acima, a expressão em (2) pode ser escrita em termos de menores e co-fatores como