

Conjunto de Exercícios 2.1

1. Encontre o número de inversões em cada uma das seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (a) $(4\ 1\ 3\ 5\ 2)$ (b) $(5\ 3\ 4\ 2\ 1)$ (c) $(3\ 2\ 5\ 4\ 1)$ (d) $(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$ (e) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ (f) $(1\ 4\ 2\ 3\ 5)$
2. Classifique cada uma das permutações do Exercício 1 como par ou ímpar.

Nos Exercícios 3–12, calcule o determinante.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

13. Encontre todos os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$.

(a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

14. Classifique cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ como par ou ímpar.
 15. Use as respostas do Exercício 14 para construir uma fórmula para o determinante de uma matriz 4×4 .
 16. Use a fórmula obtida no Exercício 15 para calcular

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

17. Use a definição de determinante para calcular

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. Resolva em x .

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

19. Mostre que o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta - \cos \theta & \sin \theta + \cos \theta & 1 \end{vmatrix}$$

não depende de θ .

20. Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

Discussão e Descoberta

21. Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com entradas inteiras deve ser um inteiro.

22. O que você pode dizer sobre o determinante de uma matriz $n \times n$ cujas entradas são todas 1? Explique seu raciocínio.
23. (a) Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com uma linha de zeros deve ser zero.
(b) Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com uma coluna de zeros deve ser zero.
24. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz $n \times n$ diagonal. Expresse sua fórmula em palavras.
25. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz $n \times n$ triangular superior. Expresse sua fórmula em palavras. Faça o mesmo para uma matriz triangular inferior.

2.2 CALCULANDO DETERMINANTES ATRAVÉS DE REDUÇÃO POR LINHAS

Nesta seção nós vamos mostrar que o determinante de uma matriz quadrada pode ser calculado através da redução da matriz à forma escalonada reduzida por linhas. Este método é importante pois evita os longos cálculos envolvidos na aplicação direta da definição de determinante.

Um Teorema Básico Como discutimos no final da seção anterior, a definição de determinante é útil para provar teoremas sobre determinantes, mas não fornece meios práticos para calculá-los, especialmente determinante de matrizes maiores do que 3×3 . Por causa disto, começamos com um teorema fundamental que nos levará a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz de qualquer tamanho n .

Teorema 2.2.1

Seja A uma matriz quadrada.

- (a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.
(b) $\det(A) = \det(A^T)$.

Prova (a). Como cada produto elementar com sinal de A tem um fator de cada linha e um fator de cada coluna, segue-se que cada produto elementar com sinal necessariamente tem um fator de uma linha de zeros ou de uma coluna de zeros. Nestes casos, cada produto elementar com sinal é zero e portanto $\det(A)$, que é uma soma de produtos elementares com sinal, é zero. ■

Nós omitimos a prova da parte (b), mas lembramos que um produto elementar tem um fator de cada linha e de cada coluna, de modo que é evidente que A e A^T têm precisamente o mesmo conjunto de produtos elementares. Com a ajuda de alguns teoremas sobre permutações, que nos levariam para muito longe dos nossos propósitos, pode ser mostrado que na realidade A e A^T têm o mesmo conjunto de produtos elementares com sinal. Isto implica que $\det(A) = \det(A^T)$.

OBSERVAÇÃO. Por causa do Teorema 2.2.1b, quase cada teorema sobre determinantes que contém a palavra "linha" em seu enunciado, também é verdadeiro se substituirmos a palavra "linha" por "coluna." Para provar uma afirmação sobre colunas, basta transpor a matriz em questão para converter a afirmação sobre

colunas numa afirmação sobre linhas e em seguida aplicar o resultado conhecido para as linhas.

Matrizes Triangulares O próximo teorema torna fácil calcular o determinante de uma matriz triangular, independentemente de seu tamanho.

Teorema 2.2.2

Se A é uma matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal) de tamanho $n \times n$, então $\det(A)$ é o produto das entradas na diagonal principal da matriz; ou seja, $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Para simplificar a notação, nós vamos provar este resultado para matrizes triangulares inferiores

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

de tamanho 4×4 . O argumento no caso $n \times n$ é similar. Uma prova para matrizes triangulares superiores pode ser obtido aplicando o Teorema 2.2.1b e observando que a transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior com as mesmas entradas na diagonal.

Prova do Teorema 2.2.2 (caso triangular inferior 4×4). O único produto elementar de A que pode ser não-nulo é $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. Para ver isto, considere um produto elementar $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ típico. Como $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, precisamos ter $j_1 = 1$ para obter um produto elementar não-nulo. Se $j_1 = 1$, devemos ter $j_2 \neq 1$, pois dois fatores não podem vir da mesma coluna. Além disso, como $a_{23} = a_{24} = 0$, precisamos ter $j_2 = 2$ para obter um produto elementar não-nulo. Continuando deste modo, obtemos $j_3 = 3$ e $j_4 = 4$. Como $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ é multiplicado por $+1$ para formar o produto elementar com sinal, resulta

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 1 Determinante de uma Matriz Triangular Superior

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296 \quad \blacklozenge$$

Operações Elementares sobre Linhas O próximo teorema mostra como uma operação elementar sobre linhas de uma matriz afeta o valor de seu determinante.

Teorema 2.2.3

Seja A uma matriz $n \times n$.

- Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k , então $\det(B) = k \det(A)$.
- Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então $\det(B) = -\det(A)$.
- Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.

Uma prova deste teorema pode ser obtida usando a Fórmula (1) da Seção 2.1 para calcular os determinantes envolvidos e depois verificar sua igualdade. Nós omitimos a prova mas damos o seguinte exemplo que ilustra o teorema para determinantes 3×3 .

EXEMPLO 2 O Teorema 2.2.3 Aplicado a Determinantes 3×3

Relação	Operação
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k \det(A)$	A primeira linha de A é multiplicada por k .
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	A primeira e a segunda linhas de A são permutadas.
$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{21} & a_{12} & ka_{22} & a_{13} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Um múltiplo da segunda linha de A é somado à primeira linha.

Nós vamos verificar a equação da última linha da tabela e deixar as duas primeiras para o leitor. Com a ajuda do Exemplo 7 da Seção 2.1, nós obtemos

$$\begin{aligned} \det(B) &= (a_{11} + ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12} + ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13} + ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}(a_{11} + ka_{21}) - a_{32}a_{23}(a_{12} + ka_{22}) - a_{33}a_{21}(a_{13} + ka_{23}) \\ &= \det(A) + k(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{23} - a_{32}a_{23}a_{21} - a_{33}a_{21}a_{22}) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A) \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Como está sendo ilustrado pela primeira equação no Exemplo 2, a parte (a) do Teorema 2.2.3 permite-nos tirar um

“fator comum” de qualquer linha (ou coluna) para fora do sinal de determinante.

Matrizes Elementares Lembre que uma matriz elementar é o resultado de efetuar uma única operação elementar sobre as linhas de uma matriz identidade; assim, se nós tomarmos $A = I_n$ no Teorema 2.2.3 [de modo que $\det(A) = \det(I_n) = 1$], então a matriz B será uma matriz elementar e o teorema fornecerá o seguinte resultado sobre determinantes de matrizes elementares.

Teorema 2.2.4

Seja E uma matriz elementar $n \times n$.

- Se E resulta de multiplicar uma linha de I_n por k , então $\det(E) = k$.
- Se E resulta de permutar duas linhas de I_n , então $\det(E) = -1$.
- Se E resulta de somar um múltiplo de uma linha de I_n a uma outra linha, então $\det(E) = 1$.

EXEMPLO 3 Determinantes de Matrizes Elementares

Os seguintes determinantes de matrizes elementares, que são calculados por inspeção, ilustram o Teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A segunda linha de I_4 foi multiplicada por 3. A primeira e última linhas de I_4 foram permutadas. 7 vezes a última linha de I_4 foi somada à primeira.

Matrizes com Linhas ou Colunas Proporcionais

Se uma matriz quadrada A tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Similarmente para colunas. Mas somando um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que, pelo Teorema 2.2.1a, nós devemos ter $\det(A) = 0$. Isto prova o seguinte teorema.

Teorema 2.2.5

Se A é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

EXEMPLO 4 Introduzindo Linhas de Zeros

O próximo cálculo ilustra a introdução de uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

A segunda linha é 2 vezes a primeira, portanto somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros.

Cada uma das seguintes matrizes tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada uma tem determinante zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

Calculando Determinantes através de Redução por Linhas Nós vamos dar agora um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos contas que aplicando a definição diretamente. A idéia do método é primeiro reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e finalmente relacionar aquele determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 5 Usando Redução por Linhas para Calcular um Determinante

Calcule $\det(A)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior) e aplicar o Teorema 2.2.3:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{A primeira e segunda linhas de } A \text{ foram permutadas.} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Um fator comum de 3 da primeira linha foi retirado através do determinante.} \end{aligned}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

-10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Um fator comum de -55 da última linha foi retirado através do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

OBSERVAÇÃO. O método de redução por linhas, por ser sistemático e facilmente programável, é muito conveniente para calcular determinantes usando computadores. No entanto, em seções subsequentes nós iremos desenvolver métodos que, em geral, são mais fáceis para cálculos à mão.

EXEMPLO 6 Usando Operações sobre Colunas para Calcular Determinantes

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução.

Este determinante poderia ser calculado como o anterior usando operações elementares sobre linhas para reduzir A à forma escalonada, mas nós podemos colocar A em forma triangular inferior em um passo, somando -3 vezes a primeira à quarta colunas para obter

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Este exemplo ressalta a utilidade de manter a atenção voltada às operações sobre colunas que podem encurtar nossas contas. ♦

Conjunto de Exercícios 2.2

1. Verifique que $\det(A) = \det(A^T)$ para

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Calcule os seguintes determinantes por inspeção.

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (d) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcule os determinantes das seguintes matrizes por inspeção.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 4–11, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

$$4. \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, encontre

$$(a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$$

13. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

14. Use um argumento como o que foi dado na prova do Teorema 2.2.2 para mostrar que

$$(a) \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} \quad (b) \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

15. Prove os seguintes casos especiais do Teorema 2.2.3.

$$(a) \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Discussão e Descoberta

16. Em cada parte, encontre $\det(A)$ por inspeção, explicando seu raciocínio.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Por inspeção, resolva a equação

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Explique seu raciocínio.

18. (a) Por inspeção, encontre duas soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(b) É possível haver outras soluções? Justifique sua resposta.

2.3 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DETERMINANTE

Nesta seção nós vamos desenvolver algumas das propriedades fundamentais da função determinante. Nosso trabalho aqui nos dará uma compreensão mais profunda da relação entre uma matriz quadrada e seu determinante. Uma das consequências imediatas deste material será um teste de determinante para a invertibilidade de uma matriz.

Propriedades Básicas dos Determinantes
Suponha que A e B são matrizes $n \times n$ e que k é um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$, $\det(B)$ e

$$\det(kA), \det(A+B) \text{ e } \det(A \cdot B)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser carregado para fora do sinal $\det$ e como cada uma das n linhas de A tem o fator k em comum, obtemos

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (1)$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(A+B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A+B)$ geralmente *não* é igual a $\det(A) + \det(B)$. O seguinte exemplo ilustra este fato.

EXEMPLO 1 $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Nós temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ e $\det(A+B) = 23$; assim, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ ♦

Não obstante o aspecto negativo do exemplo precedente, existe uma relação importante que trata de somas de determinantes e que é muitas vezes útil. Para obtê-la, considere duas matrizes 2×2 que só diferem na segunda linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Nós temos

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Este é um caso especial do seguinte resultado geral.

Teorema 2.3.1

Sejam A , B e C matrizes $n \times n$ que diferem somente em uma única linha, digamos a r -ésima, e suponha que a r -ésima linha de C pode ser obtida somando as entradas correspondentes nas r -ésimas linhas de A e B . Então

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

O mesmo resultado vale para colunas.

EXEMPLO 2 Usando o Teorema 2.3.1

Calculando os determinantes, o leitor pode verificar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$

Determinante de um Produto Matricial Quando nós consideramos a complexidade das definições de multiplicação matricial e de determinantes, parece-nos ser improvável poder haver alguma relação simples entre estes conceitos. Isto é o que faz tão surpreendente a elegante simplicidade do seguinte resultado: Nós vamos mostrar que se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) \quad (2)$$

A prova deste teorema é razoavelmente complexa, de modo que vamos precisar desenvolver primeiro alguns resultados preliminares. Nós começamos com o caso especial de (2) em que A é uma matriz elementar. Como este caso especial é só um prelúdio para (2), vamos chamá-lo de lema.

Lema 2.3.2

Se B é uma matriz $n \times n$ e E é uma matriz elementar $n \times n$, então

$$\det(E \cdot B) = \det(E) \det(B)$$