$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que $A^TA$ e $AA^T$ são simétricas, como se esperava. ♦

Adiante neste texto, nós obteremos condições gerais sobre $A$ sob as quais $AA^T$ e $A^TA$ são invertíveis. Contudo, no caso especial em que $A$ é *quadrada*, nós temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.7.4**

*Se $A$ é uma matriz invertível, então $AA^T$ e $A^TA$ são também invertíveis.*

*Prova.* Como $A$ é invertível, também $A^T$ é invertível, pelo Teorema 1.4.10. Assim, $AA^T$ e $A^TA$ são invertíveis, pois são produtos de matrizes invertíveis. ■

## Conjunto de Exercícios 1.7

**1.** Determine se a matriz dada é invertível; se for, encontre a inversa por inspeção.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**2.** Calcule, por inspeção, o produto das matrizes dadas.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**3.** Encontre $A^2$, $A^{-2}$ e $A^{-k}$ por inspeção.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

**4.** Quais das seguintes matrizes são simétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**5.** Determine, por inspeção, se a dada matriz triangular é invertível.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

**6.** Encontre todos os valores de $a$, $b$ e $c$ para os quais $A$ é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

**7.** Encontre todos os valores de $a$ e $b$ para os quais $A$ e $B$ são ambas não-invertíveis.

$$A = \begin{bmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b-7 \end{bmatrix}$$

**8.** Use a equação dada para determinar, por inspeção, se as matrizes do lado esquerdo comutam.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

**9.** Mostre que $A$ e $B$ comutam se $a - d = 7b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

**10.** Encontre uma matriz diagonal $A$ tal que

(a) $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**11.** (a) Fatore $A$ na forma $A = B\,D$, onde $D$ é uma matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 5a_{12} & 7a_{13} \\ 3a_{21} & 5a_{22} & 7a_{23} \\ 3a_{31} & 5a_{32} & 7a_{33} \end{bmatrix}$$

(b) A fatoração encontrada é a única possível? Explique.

**12.** Verifique o Teorema 1.7.1*b* para o produto $A\,B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**13.** Verifique o Teorema 1.7.1*d* para as matrizes do Exercício 12.

**14.** Verifique o Teorema 1.7.3 para a matriz $A$ dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

**15.** Seja $A$ uma matriz simétrica.
(a) Mostre que $A^2$ é simétrica. (b) Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrica.

**16.** Seja $A$ uma matriz simétrica.
(a) Mostre que $A^k$ é simétrica se $k$ é qualquer inteiro não-negativo.
(b) Se $p(x)$ é um polinômio, é $p(A)$ necessariamente simétrica? Explique.

**17.** Sejam $A$ uma matriz triangular superior e $p(x)$ um polinômio. É $p(A)$ necessariamente triangular superior? Explique.

**18.** Prove: Se $A^TA = A$ então $A$ é simétrica e $A = A^2$.

**19.** Encontre todas as matrizes diagonais $3 \times 3$ que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

**20.** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Determine se $A$ é simétrica.
(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$ (c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

**21.** Usando sua experiência com o Exercício 20, projete um teste geral que pode ser aplicado a uma fórmula para $a_{ij}$ para determinar se $A = [a_{ij}]$ é simétrica.

**22.** Uma matriz quadrada $A$ é chamada ***anti-simétrica*** se $A^T = -A$. Prove:
(a) Se $A$ é uma matriz anti-simétrica invertível, então $A^{-1}$ é anti-simétrica.
(b) Se $A$ e $B$ são anti-simétricas, então também o são $A^T$, $A + B$, $A - B$ e $kA$, para qualquer escalar $k$.
(c) Toda matriz quadrada $A$ pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica. [***Sugestão.*** Observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]

**23.** Nós mostramos no texto que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes comutam. É o produto de matrizes anti-simétricas que comutam uma matriz anti-simétrica? Explique. [***Observação.*** Veja o Exercício 22 para a terminologia.]

**24.** Se a matriz $A$ de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, onde $L$ é uma matriz triangular inferior e $U$ é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e portanto pode ser resolvido em dois passos:
**Passo 1.** Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva este sistema.
**Passo 2.** Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.
Em cada parte, use este método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaz

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

## Discussão e Descoberta

26. Qual é o número máximo de entradas distintas que pode ter uma matriz simétrica de tamanho $n \times n$? Explique seu raciocínio.
27. Invente e prove um teorema que diz como multiplicar duas matrizes diagonais.
28. Suponha que $A$ é uma matriz quadrada e que $D$ é uma matriz diagonal tal que $AD = I$. O que você pode dizer sobre a matriz $A$? Explique seu raciocínio.
29. (a) Construa um sistema linear consistente de cinco equações em cinco incógnitas que tem uma matriz de coeficientes triangular inferior com nenhum zero na diagonal principal nem abaixo da diagonal principal.
    (b) Projete um procedimento eficiente para resolver seu sistema à mão.
    (c) Invente um nome apropriado para o seu procedimento.
30. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique cada resposta.
    (a) Se $AA^T$ é singular, então também $A$ é singular.
    (b) Se $A + B$ é simétrica, então também $A$ e $B$ são simétricas.
    (c) Se $A$ é uma matriz $n \times n$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial, então também $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.
    (d) Se $A^2$ é simétrica, então também $A$ é simétrica.

## Exercícios Suplementares do Capítulo 1

1. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver $x'$ e $y'$ em termos de $x$ e $y$.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

2. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver $x'$ e $y'$ em termos de $x$ e $y$.

$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta$$

3. Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações que não são múltiplas uma da outra e tal que

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$$

e

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1$$

são soluções do sistema.

4. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos contém 13 moedas com um valor total de 83 centavos. Quantas moedas de cada tipo há na caixa?
5. Encontre inteiros positivos que satisfazem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

6. Para quais valores de $a$ o sistema a seguir tem zero, uma ou infinitas soluções?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

7. Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada de um sistema linear. Para quais valores de $a$ e $b$ o sistema tem
(a) uma única solução, (b) uma solução a um parâmetro,
(c) uma solução a dois parâmetros, (d) nenhuma solução?

8. Resolva em $x$, $y$ e $z$.

$$\begin{aligned} xy - 2\sqrt{y} + 3zy &= 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2zy &= 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2zy &= 4 \end{aligned}$$

9. Encontre uma matriz $K$ tal que $AKB = C$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Como devem ser escolhidos os coeficientes $a$, $b$ e $c$ para que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tenha a solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$?

11. Em cada parte resolva a equação matricial em $X$.

(a) $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $X\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}X - X\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

12. (a) Expresse as equações

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\ y_3 &= -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} z_1 &= 4y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= -3y_1 + 5y_2 - y_3 \end{aligned}$$

no formato matricial $Y = AX$ e $Z = BY$. Em seguida, use estas expressões para obter uma relação direta $Z = CX$ entre $Z$ e $X$.

(b) Use a equação $Z = CX$ obtida em (a) para expressar $z_1$ e $z_2$ em termos de $x_1$, $x_2$ e $x_3$.

(c) Confira o resultado em (b) substituindo diretamente as equações em $y_1$, $y_2$ e $y_3$ nas equações em $z_1$ e $z_2$ e simplificando.

13. Se $A$ é $m \times n$ e $B$ é $n \times p$, quantas operações de multiplicação e quantas de adição são necessárias para calcular o produto matricial $AB$?

14. Seja $A$ uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

(b) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ se $A^{n+1} = 0$.

15. Encontre valores de $a$, $b$, e $c$ tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

16. (***Para leitores que estudaram Cálculo.***) Encontre valores de $a$, $b$, e $c$ tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(-1, 0)$ e tem uma tangente horizontal em $(2, -9)$.

17. Seja $J_n$ a matriz $n \times n$ tal que todas entradas são 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada $A$ satisfaz a equação $A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$ então $A^T$ também satisfaz.

19. Prove: Se $B$ é invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e somente se, $AB = BA$.

20. Prove: Se $A$ é invertível, então $A + B$ e $I + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não-invertíveis.

21. Prove que se $A$ e $B$ são matrizes $n \times n$, então

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ (b) $\operatorname{tr}(kA) = k\operatorname{tr}(A)$ (c) $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$ (d) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

22. Use o Exercício 21 para mostrar que não existem matrizes quadradas $A$ e $B$ tais que

$$AB - BA = I$$

23. Prove: Se $A$ é uma matriz $m \times n$ e $B$ é a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a $1/n$, então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

onde $\bar{r}_i$ é a média das entradas na $i$-ésima linha de $A$.

24. (*Para leitores que estudaram Cálculo.*) Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções diferenciáveis de $x$, então nós definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que se as entradas de $A$ e $B$ são funções diferenciáveis de $x$ e os tamanhos das matrizes são tais que as operações estão definidas, então

(a) $\dfrac{d}{dx}(kA) = k\dfrac{dA}{dx}$ (b) $\dfrac{d}{dx}(A+B) = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$ (c) $\dfrac{d}{dx}(AB) = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$

25. (*Para leitores que estudaram Cálculo.*) Use a parte (c) do Exercício 24 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Enuncie todas as hipóteses que são necessárias para obter esta fórmula.

26. Encontre valores de $A$, $B$ e $C$ que tornam a equação

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

uma identidade. [***Sugestão.*** Multiplique ambos os lados por $(3x-1)(x^2+1)$ e iguale os coeficientes correspondentes dos polinômios obtidos em ambos os lados da equação resultante.]

27. Se $P$ é uma matriz $n \times 1$ tal que $P^TP = 1$, então $H = I - 2PP^T$ é chamada a ***matriz de Householder*** correspondente a $P$ (homenageando o matemático norte-americano A. S. Householder).

   (a) Verifique que $P^TP = 1$ se $P^T = \left[\frac{3}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{4}\ \frac{5}{12}\ \frac{5}{12}\right]$ e calcule a matriz de Householder correspondente.
   (b) Prove que se $H$ é qualquer matriz de Householder, então $H = H^T$ e $H^TH = I$.
   (c) Verifique que a matriz de Householder encontrada na parte (a) satisfaz as condições provadas na parte (b).

28. Supondo que as inversas envolvidas existem, prove as seguintes igualdades.

   (a) $(C^{-1}+D^{-1})^{-1} = C(C+D)^{-1}D$ (b) $(I+CD)^{-1}C = C(I+DC)^{-1}$
   (c) $(C+DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I+D^TC^{-1}D)^{-1}$

29. Mostre que se $a \neq b$, então

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar $A^n$ se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

[***Observação.*** Este exercício deriva de um problema submetido por John M. Johnson, em *The Mathematics Teacher*, Vol. 85, No. 9, 1992.]

**Requisito: Recurso Computacional**

## Exercícios Computacionais do Capítulo 1

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.