Teorema 1.6.5

Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se A B é invertível, então A e B também são invertíveis.

O seguinte problema fundamental ocorrerá em vários contextos no nosso trabalho adiante.

Um Problema Fundamental. Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente.

Para matrizes A invertíveis, o Teorema 1.6.2 resolve este problema completamente afirmando que, para *qualquer* matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se A não for quadrada, ou se A for quadrada mas não-invertível, então o Teorema 1.6.2 não aplica. Nestes casos, a matriz $\mathbf{b}$ deve, em geral, satisfazer certas condições para garantir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente. O seguinte exemplo ilustra como os métodos de eliminação da Seção 1.2 podem ser usados para determinar tais condições.

EXEMPLO 3 Determinando Consistência por Eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

Solução

A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser reduzida à forma escalonada como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ −1 vez a primeira linha foi somada à segunda e −2 vezes a primeira linha foi somada à terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ A segunda linha foi multiplicada por −1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ A segunda linha foi somada à terceira.

Agora é evidente pela terceira linha da matriz que o sistema tem uma solução se, e somente se, b_1, b_2 e b_3 satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar esta condição de uma outra maneira, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e somente se, $\mathbf{b}$ é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

onde b_1 e b_2 são arbitrários. ◆

EXEMPLO 4 Determinando Consistência por Eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

Solução.

A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada reduzida por linhas obtemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Neste caso não há restrições sobre b_1, b_2 e b_3; ou seja, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

para qualquer $\mathbf{b}$. ◆

OBSERVAÇÃO. Como o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do exemplo precedente é consistente para qualquer $\mathbf{b}$, segue do Teorema 1.6.4 que A é invertível. Nós deixamos a cargo do leitor verificar que as fórmulas em (3) também podem ser usadas para calcular $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Conjunto de Exercícios 1.6

Nos Exercícios 1–8 resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$ **5.** $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$ **6.** $\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$ **8.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

9. Resolva o seguinte sistema geral invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Use as fórmulas resultantes para encontrar a solução se

(a) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 4$ (b) $b_1 = 5, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0$ (c) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 3$

10. Resolva os três sistemas do Exercício 9 simultaneamente usando o método do Exemplo 2.

Nos Exercícios 11–14 use o método do Exemplo 2 para resolver simultaneamente todos os sistemas dados.

11. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 1, \quad b_2 = 4$
(b) $b_1 = -2, \quad b_2 = 5$

12. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$
(b) $b_1 = -3, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = -5$

13. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1$
(b) $b_1 = -4, \quad b_2 = 6$
(c) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3$
(d) $b_1 = -5, \quad b_2 = 1$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1$
(b) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1$
(c) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0$

15. O método do Exemplo 2 pode ser usado em sistemas lineares com infinitas soluções. Use aquele método para resolver os sistemas de ambas partes simultaneamente.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

Nos Exercícios 16–19 encontre condições que as constantes b devem satisfazer para o sistema ser consistente.

16. $\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$ **17.** $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$ **19.** $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_1 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_1 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_1 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_1 &= b_4 \end{aligned}$

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use este resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ em $\mathbf{x}$.
(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

21. Resolva a equação seguinte em X.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$