Invertibilidade de uma Transposta O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

Teorema 1.4.10

Se A é uma matriz invertível, então A^T também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{4}$$

Prova. Nós podemos provar a invertibilidade de A^T e obter (4) mostrando que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

Mas lembrando da parte (*d*) do Teorema 1.4.9 e observando que $I^T = I$, segue-se que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$
$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

o que completa a prova. ■

EXEMPLO 10 Verificando o Teorema 1.4.10

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1.4.5 obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Como garante o Teorema 1.4.10, estas matrizes satisfazem (4). ♦

Conjunto de Exercícios 1.4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$
(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$
(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^T A^T$

4. Use o Teorema 1.4.5 para calcular as inversas das seguintes matrizes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Use as matrizes A e B do Exercício 4 para verificar que

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (b) $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$

6. Use as matrizes A, B e C do Exercício 4 para verificar que

(a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

7. Em cada parte use a informação dada para encontrar A.

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

8. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3, A^{-3} e $A^2 - 2A + I$.

o que

4). ♦

9. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte encontre $p(A)$.
(a) $p(x) = x - 2$ (b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ (c) $p(x) = x^3 - 2x + 4$

10. Sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$.
(a) Mostre que $p_1(A) = p_2(A)\,p_3(A)$ para a matriz do Exercício 9.
(b) Mostre que $p_1(A) = p_2(A)\,p_3(A)$ para qualquer matriz quadrada A.

11. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

12. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

14. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.
15. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.
(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.
16. Será necessariamente invertível a soma de duas matrizes invertíveis?
17. Sejam A e B matrizes quadradas tais que $AB = 0$. Mostre que se A é invertível, então $B = 0$.
18. Sejam A, B e 0 matrizes 2×2. Supondo que A é invertível, encontre uma matriz C tal que

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline C & A^{-1} \end{array}\right]$$

é a inversa da matriz particionada

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right]$$

(Veja Exercício 15 da seção anterior.)

19. Use o resultado do Exercício 18 para encontrar as inversas das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. (a) Encontre uma matriz não-nula A de tamanho 3×3 tal que $A^T = A$.
(b) Encontre uma matriz não-nula A de tamanho 3×3 tal que $A^T = -A$.
21. Uma matriz quadrada A é chamada ***simétrica*** se $A^T = A$ e ***anti-simétrica*** se $A^T = -A$. Mostre que se B é uma matriz quadrada, então
(a) BB^T e $B + B^T$ são simétricas. (b) $B - B^T$ é anti-simétrica.
22. Se A é uma matriz quadrada e n é um inteiro positivo, é verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$?
23. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [***Sugestão.*** Resolva $AX = I$ igualando entradas correspondentes de ambos os lados.]

24. Prove:
   (a) a parte (*b*) do Teorema 1.4.1
   (b) a parte (*i*) do Teorema 1.4.1
   (c) a parte (*m*) do Teorema 1.4.1

25. Aplique as partes (*d*) e (*m*) do Teorema 1.4.1 às matrizes A, B e $(-1)\,C$ para deduzir o resultado da parte (*f*).

26. Prove o Teorema 1.4.2.

27. Considere as leis de expoentes $A^r A^s = A^{r+s}$ e $(A^r)^s = A^{rs}$.
   (a) Mostre que se A é uma matriz quadrada, estas leis são válidas para quaisquer inteiros não negativos r e s.
   (b) Mostre que se A é invertível, estas leis valem para quaisquer inteiros negativos r e s.

28. Mostre que se A é invertível e k é um escalar não-nulo qualquer, então $(kA)^n = k^n A^n$ para qualquer inteiro n.

29. (a) Mostre que se A é invertível e $AB = AC$, então $B = C$.
   (b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.

30. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.1.
[***Sugestão.*** Suponha que A é $m \times n$, B é $n \times p$ e C é $p \times q$. A ij-ésima entrada do lado esquerdo é $l_{ij} = a_{i1}[BC]_{1j} + a_{i2}[BC]_{2j} + \cdots + a_{in}[BC]_{nj}$ e a ij-ésima entrada do lado direito é $r_{ij} = [AB]_{i1}c_{1j} + [AB]_{i2}c_{2j} + \cdots + [AB]_{ip}c_{pj}$. Verifique que $l_{ij} = r_{ij}$.]

Discussão e Descoberta

31. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
   (a) Dê um exemplo em que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
   (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A + B)^2 = A^2 + B^2 +$ ____________.

32. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
   (a) Dê um exemplo em que $(A + B)(B - A) \neq A^2 - B^2$.
   (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A + B)(B - A) =$ ____________.

33. No sistema dos números reais, a equação $a^2 = 1$ tem exatamente duas soluções. Encontre pelo menos oito matrizes 3×3 que satisfazem a equação $A^2 = I_3$. [***Sugestão.*** Procure soluções entre as matrizes com entradas zero fora da diagonal principal.]

34. Uma afirmação do tipo "Se p, então q" é logicamente equivalente à afirmação "Se não q, então não p." (A segunda afirmação é chamada a ***contraposição lógica*** da primeira.) Por exemplo, a contraposição lógica da afirmação "Se está chovendo, então o chão está molhado" é "Se o chão não está molhado, então não está chovendo."
   (a) Encontre a contraposição lógica da afirmação: Se A^T é singular, então A é singular.
   (b) A afirmação é verdadeira ou falsa? Explique.

35. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.
   (a) $(AB)^2 = A^2B^2$ deve ser verdadeiro.
   (b) $(A - B)^2 = (B - A)^2$ deve ser verdadeiro.
   (c) $(AB^{-1})(BA^{-1}) = I_n$ deve ser verdadeiro.
   (d) Nunca é verdade que $AB = BA$.

1.5 MATRIZES ELEMENTARES E UM MÉTODO PARA ENCONTRAR A^{-1}

Nesta seção nós vamos desenvolver um algorítmo para encontrar a inversa de uma matriz invertível. Nós também discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Nós começamos com a definição de um tipo especial de matriz que pode ser usada para executar uma operação elementar sobre linhas por multiplicação matricial.

Definição

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma ***matriz elementar***.

EXEMPLO 1 Matrizes Elementares e Operações sobre Linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações sobre linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda linha de I_2 por -3	Permute a segunda linha de I_4 com a quarta.	Some 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira.	Multiplique a primeira linha de I_3 por 1.

◆

Quando uma matriz A é multiplicada *à esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é o de executar uma operação elementar sobre linhas de A. Isto é enunciado no próximo teorema, cuja prova deixamos para os exercícios.