EXEMPLO 11 Traço de uma Matriz

A seguir, exemplos de matrizes e seus traços.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$ ♦

Conjunto de Exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes dos seguintes tamanhos:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Resolva a seguinte equação matricial em termos de a, b, c e d.

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule os seguintes (quando possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$ (d) $-7C$
(e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$ (g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$
(i) $\operatorname{tr}(D)$ (j) $\operatorname{tr}(D - 3E)$ (k) $4\operatorname{tr}(7B)$ (l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$ (d) $B^T + 5C^T$
(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$ (g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(e) $A(BC)$ (f) CC^T (g) $(DA)^T$
(i) $\operatorname{tr}(DD^T)$ (j) $\operatorname{tr}(4E^T - D)$ (k) $\operatorname{tr}(C^TA^T + 2E^T)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$ (c) $(-AC)^T + 5D^T$
(d) $(BA^T - 2C)^T$ (e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método do Exemplo 7 para encontrar
(a) a primeira linha de AB (b) a terceira linha de AB (c) a segunda coluna de AB
(d) a primeira coluna de BA (e) a terceira linha de AA (f) a terceira coluna de AA

8. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.

(a) Expresse cada matriz-coluna de AB como uma combinação linear das matrizes-coluna de A.

(b) Expresse cada matriz-coluna de BA como uma combinação linear das matrizes-coluna de B.

9. Sejam

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mostre que o produto $\mathbf{y}A$ pode ser expressso como uma combinação linear das matrizes-linha de A com coeficientes escalares vindo de $\mathbf{y}$.

10. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.

(a) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $A\,B$ como uma combinação linear das matrizes-linha de B.

(b) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $B\,A$ como uma combinação linear das matrizes-linha de A.

11. Sejam C, D e E as matrizes do Exercício 3. Usando o mínimo possível de contas, determine a entrada na linha 2 e coluna 3 de $C\,(D\,E)$.

12. (a) Mostre que se $A\,B$ e $B\,A$ estão ambas definidas, então $A\,B$ e $B\,A$ são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ e $A\,(B\,A)$ está definida, então B é uma matriz $n \times m$.

13. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad\quad - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. Se A e B são particionadas em submatrizes, por exemplo,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

então $A\,B$ pode ser expresso como

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

sempre que os tamanhos das submatrizes de A e B são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas. Este método de multiplicar matrizes particionadas é chamado ***multiplicação em bloco***. Em cada parte, calcule o produto usando multiplicação em bloco. Confira seus resultados multiplicando diretamente.

(a) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

(b) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

16. Adapte o método do Exercício 15 para calcular os seguintes produtos usando multiplicação em bloco.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right]$

17. Em cada parte, determine se pode ser usada multiplicação em bloco para calcular $A\,B$ a partir das partições dadas. Se puder, calcule o produto usando multiplicação em bloco.

(a) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

(b) $A = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

18. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto $A\,B$ está definido, então $A\,B$ também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado similar valendo para uma coluna de zeros.

19. Seja A uma matriz $m \times n$ qualquer e seja 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $k\,A = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $A\,I = I\,A = A$ para qualquer matriz $n \times n$ A.

21. Em cada parte, encontre uma matriz $[\,a_{ij}\,]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras e não números para entradas não-nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (d) $a_{ij} = 0$ se $|\,i - j\,| > 1$

22. Encontre a matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$ (c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{se } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

23. Prove: Se A e B são matrizes $n \times n$, então $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

Discussão e Descoberta

24. Descreva três métodos distintos para calcular um produto de matrizes e ilustre os métodos calculando algum produto $A\,B$ destas três maneiras.

25. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

26. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

27. Dizemos que uma mátriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $B\,B = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

28. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.
   (a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $A\,A = 0$? Justifique sua resposta.
   (b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $A\,A = A$? Justifique sua resposta.

29. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   (a) As expressões $\operatorname{tr}(AA^T)$ e $\operatorname{tr}(A^TA)$ estão sempre definidas, independentemente do tamanho de A.
   (b) $\operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(A^TA)$ para qualquer matriz A.
   (c) Se a primeira coluna de A for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto $A\,B$.
   (c) Se a primeira linha de A for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto $A\,B$.

30. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   (a) Se A é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então $A\,A$ tem duas linhas idênticas.
   (b) Se A é uma matriz quadrada e $A\,A$ tem uma coluna toda constituída de zeros então necessariamente A tem uma coluna toda constituída de zeros
   (c) Se B é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são inteiros pares positivos e se A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são inteiros positivos, então as entradas de $A\,B$ e de $B\,A$ são inteiros pares positivos.
   (c) Se a soma de matrizes $A\,B + B\,A$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas.

1.4 INVERSAS; REGRAS DA ARITMÉTICA MATRICIAL

Nesta seção nós vamos discutir algumas propriedades das operações aritméticas sobre matrizes. Nós veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas que algumas poucas não valem.

Propriedades das Operações Matriciais Para números reais a e b, nós sempre temos $ab = ba$, que é chamada a *lei da comutatividade para a multiplicação*. Para matrizes, contudo, AB e BA não precisam ser iguais; a igualdade pode falhar por três razões. Pode acontecer que o produto AB está definido mas o produto BA não está definido. Por exemplo, este é o caso se A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×4. Também pode ocorrer que os produtos AB e BA estão ambos definidos mas têm tamanhos diferentes. Esta é a situação se A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×2. Finalmente, como mostra o Exemplo 1, é possível ter $AB \neq BA$ mesmo se ambos produtos AB e BA estiverem definidos e tiverem o mesmo tamanho.

EXEMPLO 1 $A\,B$ e $B\,A$ não Precisam Ser Iguais

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $A\,B \neq B\,A$. ◆

Embora a lei da comutatividade para a multiplicação não seja válida na aritmética matricial, muitas leis familiares da aritmética são válidas para matrizes. O teorema a seguir dá um resumo de algumas das mais importantes e seus nomes.

Teorema 1.4.1 Propriedades da Aritmética Matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) $A + B = B + A$	**(Lei da Comutatividade para a Adição)**
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$	**(Lei da Associatividade da Adição)**
(c) $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$	**(Lei da Associatividade da Multiplicação)**
(d) $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$	**(Lei da Distributividade à Esquerda)**
(e) $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$	**(Lei da Distributividade à Direita)**
(f) $A\,(B - C) = A\,B - A\,C$	(j) $(a + b)\,C = a\,C + b\,C$
(g) $(B - C)\,A = B\,A - C\,A$	(k) $(a - b)\,C = a\,C - b\,C$
(h) $a\,(B + C) = a\,B + a\,C$	(l) $a\,(b\,C) = (a\,b)\,C$
(i) $a\,(B - C) = a\,B - a\,C$	(m) $a\,(B\,C) = (a\,B)\,C = B\,(a\,C)$

Para provar as igualdades neste teorema, nós devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. Exceto pela lei da associatividade na parte (c), todas as provas seguem o mesmo padrão geral. Para ilustrar isto, iremos provar a parte (d). A prova da lei da associatividade, que é mais complicada, é delineada nos exercícios.

Prova (d). Nós devemos mostrar que $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho e que as entradas correspondentes são iguais. Para formar $A(B + C)$, as matrizes B e C devem ter o mesmo tamanho, digamos $m \times n$, e então a matriz A deve ter m colunas, de modo que seu tamanho é da forma $r \times m$. Isto faz de $A(B + C)$ uma matriz $r \times n$. Segue que $AB + AC$ também é uma matriz $r \times n$ e, conseqüentemente, $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho.

Suponha que $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Nós queremos mostrar que as entradas correspondentes de $A(B + C)$ e de $AB + AC$ são iguais, ou seja, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$