que o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada terá a forma

$$\begin{array}{rl} \cdots x_{k_1} \qquad\qquad & + \Sigma(\,) = 0 \\ \cdots x_{k_2} \qquad & + \Sigma(\,) = 0 \\ \ddots \quad & \quad \vdots \\ x_{k_r} & + \Sigma(\,) = 0 \end{array} \tag{3}$$

onde $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ são as variáveis líderes e $\Sigma(\,)$ denota as somas (possivelmente todas distintas) que envolvem as $n - r$ variáveis livres [compare o sistema (3) com o sistema (2) acima]. Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= -\Sigma(\,) \\ x_{k_2} &= -\Sigma(\,) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma(\,) \end{aligned}$$

Como no Exemplo 7, podemos atribuir valores arbitrários às variáveis livres do lado direito e assim obter infinitas soluções do sistema.

Resumindo, nós temos o importante teorema a seguir.

Teorema 1.2.1

Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções.

OBSERVAÇÃO. Note que o Teorema 1.2.1 aplica somente a sistemas homogêneos. Um sistema não-homogêneo com mais incógnitas que equações não precisa ser consistente (Exercício 28); contudo, se o sistema for consistente, terá infinitas soluções. Isto será provado mais tarde.

Soluções Computacionais de Sistemas Lineares Em aplicações não é incomum encontrar sistemas lineares grandes que precisam ser resolvidos por computador. A maioria dos algoritmos computacionais para resolver estes sistemas são baseados na eliminação gaussiana ou na eliminação de Gauss-Jordan, mas os procedimentos básicos são muitas vezes modificados para comportar problemas tais como

- Redução de erros de arredondamento
- Minimização do uso de espaço de memória do computador
- Resolução do sistema com rapidez máxima

Alguns desses assuntos serão considerados no Capítulo 9. Fazendo cálculos à mão, as frações constituem um aborrecimento que muitas vezes não pode ser evitado. Contudo, em alguns casos é possível evitar as frações variando as operações elementares sobre linhas da maneira correta. Assim, uma vez que as técnicas da eliminação gaussiana e da eliminação de Gauss-Jordan tiverem sido dominadas, o leitor poderá querer variar os passos em problemas específicos para evitar frações (ver Exercício 18).

OBSERVAÇÃO. Como a eliminação de Gauss-Jordan evita o uso de substituição inversa, poderia parecer que este método é o mais eficiente dos dois métodos que nós consideramos. Pode ser argumentado que esta afirmação é verdadeira quando resolvemos manualmente sistemas pequenos, pois a eliminação de Gauss-Jordan na verdade envolve escrever menos. Contudo, foi mostrado que para sistemas grandes de equações, o método de eliminação de Gauss-Jordan requer cerca de 50% mais operações que a eliminação gaussiana. Esta é uma consideração importante quando trabalhamos com computadores.

Conjunto de Exercícios 1.2

1. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada reduzida por linhas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.

(a) $\begin{bmatrix}1&2&0&3&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&0&1&3\\0&1&0&4\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&4\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1&-7&5&5\\0&1&3&2\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}1&3&0&2&0\\1&0&2&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&0&0&-7&8\\0&1&0&3&2\\0&0&1&1&-5\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&-6&0&0&3&-2\\0&0&1&0&4&7\\0&0&0&1&5&8\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

5. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix}1&-3&4&7\\0&1&2&2\\0&0&1&5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&0&8&-5&6\\0&1&4&-9&3\\0&0&1&1&2\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&7&-2&0&-8&-3\\0&0&1&1&6&5\\0&0&0&1&3&9\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&-3&7&1\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

6. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned}x_1+x_2+2x_3&=8\\-x_1-2x_2+3x_3&=1\\3x_1-7x_2+4x_3&=10\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}2x_1+2x_2+2x_3&=0\\-2x_1+5x_2+2x_3&=1\\8x_1+x_2+4x_3&=-1\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}x-y+2z-w&=-1\\2x+y-2z-2w&=-2\\-x+2y-4z+w&=1\\3x\qquad\qquad-3w&=-3\end{aligned}$ (d) $\begin{aligned}-2b+3c&=1\\3a+6b-3c&=-2\\6a+6b+3c&=5\end{aligned}$

7. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 6 por eliminação gaussiana.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned}2x_1-3x_2&=-2\\2x_1+x_2&=1\\3x_1+2x_2&=1\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}3x_1+2x_2-x_3&=-15\\5x_1+3x_2+2x_3&=0\\3x_1+x_2+3x_3&=11\\-6x_1-4x_2+2x_3&=30\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}4x_1-8x_2&=12\\3x_1-6x_2&=9\\-2x_1+4x_2&=-6\end{aligned}$ (d) $\begin{aligned}10y-4z+w&=1\\x+4y-z+w&=2\\3x+2y+z+2w&=5\\-2x-8y+2z-2w&=-4\\x-6y+3z\qquad&=1\end{aligned}$

9. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 8 por eliminação gaussiana.

10. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned}5x_1-2x_2+6x_3&=0\\-2x_1+x_2+3x_3&=1\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3-4x_4&=1\\x_1+3x_2+7x_3+2x_4&=2\\x_1-12x_2-11x_3-16x_4&=5\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned}w+2x-y&=4\\x-y&=3\\w+3x-2y&=7\\2u+4v+w+7x\qquad&=7\end{aligned}$

11. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 10 por eliminação gaussiana.

12. Sem utilizar papel e lápis, determine quais dos seguintes sistemas homogêneos têm soluções não-triviais.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

13. Reolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

14. Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

15. Resolva os seguintes sistemas por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \quad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \quad - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \quad + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

16. Resolva os seguintes sistemas, onde a, b e c são constantes.

(a) $\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 \quad + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$

17. O sistema seguinte não tem soluções para quais valores de a? Exatamente uma solução? Infinitas soluções?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

18. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida por linhas sem introduzir quaisquer frações.

19. Obtenha duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Resolva o seguinte sistema de equações não-lineares para os ângulos incógnitos α, β e γ, onde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 3 \\ 4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta - 2 \operatorname{tg} \gamma &= 2 \\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \beta + \operatorname{tg} \gamma &= 9 \end{aligned}$$

21. Mostre que o seguinte sistema não-linear tem 18 soluções se $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \\ 2 \operatorname{sen} \alpha + 5 \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha - 5 \cos \beta + 5 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \end{aligned}$$

22. Para que valor(es) de λ o sistema de equações

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

tem soluções não-triviais?

23. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

para x_1, x_2 e x_3 nos dois casos $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

24. Resolva o seguinte sistema para x, y e z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

25. Encontre coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura é o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

26. Encontre coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura é dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.

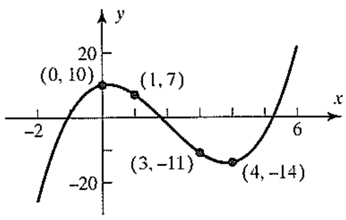

Figura Ex-25

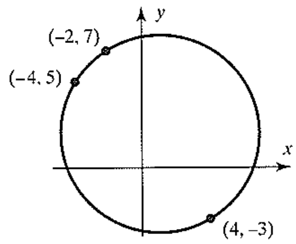

Figura Ex-26

27. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução quando $ad - bc \neq 0$.

28. Encontre um sistema linear inconsistente que tem mais incógnitas do que equações.

Discussão e Descoberta

29. Discuta as formas escalonadas reduzidas por linhas possíveis de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

30. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ quando o sistema
(a) tem somente a solução trivial e
(b) tem soluções não-triviais.

31. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
(a) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada reduzida por linhas por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.
(b) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.

(c) Se a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve possuir uma infinidade de soluções.

(d) Se três retas do plano xy são lados de um triângulo, então o sistema de equações formado pelas suas equações tem três soluções, uma correspondendo a cada vértice.

32. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
(a) Um sistema linear de três equações em cinco incógnitas é consistente.
(b) Um sistema linear de cinco equações em três incógnitas não pode ser consistente.
(c) Se um sistema linear de n equações em n incógnitas tiver n entradas líder na forma escalonada reduzida por linhas de sua matriz aumentada, então o sistema terá exatamente uma solução.
(d) Se umsistema linear de n equações em n incógnitas tiver duas equações que são múltiplas uma da outra, então o sistema será inconsistente.

1.3 MATRIZES E OPERAÇÕES MATRICIAIS

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção nós vamos começar nosso estudo da teoria das matrizes dando algumas das definições fundamentais do assunto. Nós vamos ver como as matrizes podem ser combinadas através das operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação.

Notação e Terminologia Matricial Na Seção 1.2 nós usamos agrupamentos retangulares de números, denominados *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, agrupamentos retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias durante uma certa semana:

	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sab.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Se nós suprimirmos os títulos, ficaremos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada *matriz*:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

Definição

Uma ***matriz*** é um agrupamento retangular de números. Os números neste agrupamento são chamados ***entradas*** da matriz.

EXEMPLO 1 Exemplos de Matrizes

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4] \blacklozenge$$

O ***tamanho*** de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais) que contém. Por exemplo, a primeira matriz do Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, portanto seu tamanho é 3 por 2 (e escrevemos 3×2). Numa descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo o de colunas. As outras matrizes do Exemplo 1 têm tamanhos 1×4, 3×3, 2×1 e 1×1, respectivamente. Uma matriz com somente uma coluna é chamada ***matriz-coluna*** (ou ***vetor-coluna***) e uma matriz com somente uma linha é chamada ***matriz-linha*** (ou ***vetor-linha***). Assim, no Exemplo 1 a matriz 2×1 é uma matriz-coluna, a matriz 1×4 é uma matriz-linha e a matriz 1×1 é tanto uma matriz-coluna quanto uma matriz-linha. (O termo *vetor* tem um outro significado que será discutido em capítulos subseqüentes.)

OBSERVAÇÃO. É prática comum omitir os colchetes numa matriz 1×1. Assim, nós podemos escrever 4 em vez de [4]. Embora isto torne impossível dizer se 4 denota o número "quatro" ou a matriz 1×1 cuja única entrada é este número "quatro," isto raramente causa problemas, pois geralmente é possível discernir a que nos estamos referindo a partir do contexto no qual aparece o símbolo.

Nós iremos usar letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Quando discutimos matrizes, é usual chamar as quantidades numéricas de ***escalares***. A menos de menção explícita em contrário, *escalares são números reais*; escalares complexos serão considerados no Capítulo 10.

A entrada que ocorre na i-ésima linha e j-ésima coluna de uma matriz A é denotada por a_{ij}. Assim, uma matriz arbitrária 3×4 pode ser escrita como