Some −2 vezes a primeira equação à segunda para obter esquerda

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Some −2 vezes a primeira linha à segunda para obter direita

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Some −3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Some −3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda equação por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplique a segunda linha por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Some −3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Some −3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplique a terceira equação por −2 para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplique a terceira linha por −2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Some −1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Some −1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Some $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Some $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ pode, agora, ser visualizada. ◆

Conjunto de Exercícios 1.1

1. Quais das seguintes equações são lineares em x_1, x_2 e x_3?

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$ (c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ (e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ (f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Sabendo que k é uma constante, quais das seguintes equações são lineares?

(a) $x_1 - x_2 + x_3 = \operatorname{sen} k$ (b) $kx_1 - \dfrac{1}{k}x_2 = 9$ (c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Encontre o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações lineares.

(a) $7x - 5y = 3$ (b) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(c) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$ (d) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Encontre a matriz aumentada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \qquad &= 1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

5. Encontre o sistema de equações lineares correspondendo à matriz aumentada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. (a) Encontre uma equação linear nas variáveis x e y que tem $x = 5 + 2t$, $y = t$ como solução geral.

(b) Mostre que $x = t$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ também é a solução geral da equação da parte (a).

7. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

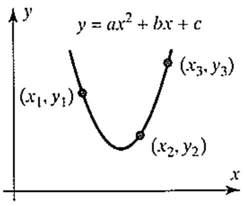

Figura Ex-7

8. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x \quad\; + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

Mostre que para este sistema ser consistente, as constantes a, b e c devem satisfazer $c = a + b$.

9. Mostre que se as equações lineares $x_1 + kx_2 = c$ e $x_1 + lx_2 = d$ têm o mesmo conjunto-solução, então as equações são idênticas.

Discussão e Descoberta

10. Para quais valores da constante k o sistema

$$\begin{aligned} x - \;\; y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não tem solução? Exatamente uma solução? Infinitas soluções? Explique seu raciocínio.

11. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m \end{aligned}$$

O que você pode dizer sobre a posição relativa das retas $ax + by = k$, $cx + dy = l$ e $ex + fy = m$, quando
(a) o sistema não tem solução;
(b) o sistema tem exatamente uma solução;
(c) o sistema tem infinitas soluções?

12. Se o sistema do Exercício 11 for consistente, explique por que pelo menos uma das equações poderá ser descartada do sistema sem alterar o conjunto-solução.

13. Se $k = l = m$ no Exercício 11, explique por que o sistema deve ser consistente. O que pode ser dito sobre o ponto de corte das três retas se o sistema tem exatamente uma solução?

1.2 ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Nesta seção nós vamos desenvolver um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento é baseado na idéia de reduzir a matriz aumentada de um sistema a uma outra matriz aumentada que seja suficientemente simples a ponto de permitir visualizar a solução.

Forma Escalonada No Exemplo 3 da última seção nós resolvemos um sistema linear nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir da qual a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ficou evidente. Isto é um exemplo de uma matriz que está em ***forma escalonada reduzida por linhas***. Para ser desta forma, um matriz deve ter as seguintes propriedades:

1. Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é um 1. Chamamos este número 1 de ***líder*** ou ***pivô***.
2. Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita que o líder da linha superior.
4. Cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em ***forma escalonada por linhas***, ou simplesmente, em ***forma escalonada***. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)