Solução.

Para aplicar (9), primeiro reescrevemos a equação do plano na forma

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

Então

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$ ♦

Dados dois planos, ou bem eles se cortam, e então podemos perguntar pela sua reta de corte, como no Exemplo 6, ou bem são paralelos, e então podemos perguntar pela distância entre eles. O próximo exemplo ilustra o segundo caso.

EXEMPLO 9 Distância entre Planos Paralelos

Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos pois seus vetores normais, (1, 2, −2) e (2, 4, −4), são paralelos. Encontre a distância entre estes planos.

Solução.

Para obter a distância D entre os planos, podemos selecionar um ponto arbitrário em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Colocando $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ neste plano. A partir de (9), a distância entre P_0 e o plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$ ♦

Conjunto de Exercícios 3.5

1. Encontre a forma ponto-normal da equação do plano passando por P e tendo normal $\mathbf{n}$.
   (a) $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$ (b) $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$
   (c) $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$
2. Escreva as equações dos planos do Exercício 1 na forma geral.
3. Encontre uma forma ponto-normal.
   (a) $-3x + 7y + 2z = 10$ (b) $x - 4z = 0$
4. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos dados.
   (a) $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$ (b) $P(5, 4, 3)$, $Q(4, 3, 1)$, $R(1, 5, 4)$
5. Determine se os planos são paralelos.
   (a) $4x - y + 2z = 5$ e $7x - 3y + 4z = 8$
   (b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ e $3x - 12y - 9z -$ [illegible]
   (c) $2y = 8x - 4z + 5$ e $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$
6. Determine se a reta e o plano são paralelos.
   (a) $x = -5 - 4t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + 2t$; $x + 2y + 3z - 9 = 0$
   (b) $x = 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 - t$; $4x - y + 2z = 1$
7. Determine se os planos são perpendiculares.
   (a) $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$ (b) $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$
8. Determine se a reta e o plano são perpendiculares.
   (a) $x = -2 - 4t,\ y = 3 - 2t,\ z = 1 + 2t$; $2x + y - z = 5$
   (b) $x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ z = 5 + 3t$; $6x + 6y - 7 = 0$
9. Encontre as equações paramétricas para a reta passando por P e paralela a $\mathbf{n}$.
   (a) $P(3, -1, 2)$; $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ (b) $P(-2, 3, -3)$; $\mathbf{n} = (6, -6, -2)$
   (c) $P(2, 2, 6)$; $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$
10. Encontre as equações paramétricas para a reta passando pelos pontos dados.
   (a) $(5, -2, 4)$, $(7, 2, -4)$ (b) $(0, 0, 0)$, $(2, -1, -3)$
11. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.
   (a) $7x - 2y + 3z = -2$ e $-3x + y + 2z + 5 = 0$ (b) $2x + 3y - 5z = 0$ e $y = 0$
12. Encontre a forma vetorial da equação do plano passando por P_0 e tendo normal $\mathbf{n}$.
   (a) $P_0(-1, 2, 4)$; $\mathbf{n} = (-2, 4, 1)$ (b) $P_0(2, 0, -5)$; $\mathbf{n} = (-1, 4, 3)$
   (c) $P_0(5, -2, 1)$; $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ (d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (a, b, c)$

13. Determine se os planos são paralelos.
(a) $(-1, 2, 4) \cdot (x - 5, y + 3, z - 7) = 0$; $(2, -4, -8) \cdot (x + 3, y + 5, z - 9) = 0$
(b) $(3, 0, -1) \cdot (x + 1, y - 2, z - 3) = 0$; $(-1, 0, 3) \cdot (x + 1, y - z, z - 3) = 0$

14. Determine se os planos são perpendiculares.
(a) $(-2, 1, 4) \cdot (x - 1, y, z + 3) = 0$; $(1, -2, 1) \cdot (x + 3, y - 5, z) = 0$
(b) $(3, 0, -2) \cdot (x + 4, y - 7, z + 1) = 0$; $(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

15. Encontre a forma vetorial da equação da reta passando por P_0 e paralela a **v**.
(a) $P_0(-1, 2, 3)$; $\mathbf{v} = (7, -1, 5)$ (b) $P_0(2, 0, -1)$; $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
(c) $P_0(2, -4, 1)$; $\mathbf{v} = (0, 0, -2)$ (d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{v} = (a, b, c)$

16. Mostre que a reta

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

Lista

(a) está no plano $6x + 4y - 4z = 0$
(b) está abaixo do plano $5x - 3y + 3z = 1$ e é paralela a este plano
(c) está acima do plano $6x + 2y - 2z = 3$ e é paralela a este plano

17. Encontre uma equação para o plano passando por $(-2, 1, 7)$ que é perpendicular à reta $x - 4 = 2t$, $y + 2 = 3t$, $z = -5t$.

18. Encontre uma equação do
(a) plano xy
(b) plano xz
(c) plano yz

19. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) que é
(a) paralelo ao plano xy
(b) paralelo ao plano yz
(c) paralelo ao plano xz

20. Encontre uma equação para o plano passando pela origem e que é paralelo ao plano $7x + 4y - 2z + 3 = 0$.

21. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(3, -6, 7)$ que é paralelo ao plano $5x - 2y + z - 5 = 0$.

22. Encontre o ponto de corte da reta

$$x - 9 = -5t, \quad y + 1 = -t, \quad z - 3 = t$$

e o plano $2x - 3y + 4z + 7 = 0$.

23. Encontre uma equação para o plano que contém a reta $x = -1 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = 2 - t$ e que é perpendicular ao plano $2x - 4y + 2z =$

24. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(2, 4, -1)$ que contém a interseção dos planos $x - y - 4z = 2$ e $-2x + y + 2z =$

25. Mostre que os pontos $(-1, -2, -3)$, $(-2, 0, 1)$, $(-4, -1, -1)$ e $(2, 0, 1)$ estão num mesmo plano.

26. Encontre equações paramétricas para a reta passando pelo ponto $(-2, 5, 0)$ que é paralela aos planos $2x + y - 4z = 0$ e $-x + 2y + 3z +$

27. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(-2, 1, 5)$ que é perpendicular aos planos $4x - 2y + 2z = -1$ e $3x + 3y - 6z =$

28. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(2, -1, 4)$ que é perpendicular à reta de interseção dos planos $4x + 2y + 2z =$ $3x + 6y + 3z = 7$.

29. Encontre uma equação para o plano que é perpendicular ao plano $8x - 2y + 6z = 1$ e que passa pelos pontos $P_1(-1, 2, 5)$ e $P_2(2, 1,$

30. Mostre que as retas

$$x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 7 + t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

são paralelas e encontre uma equação para o plano que elas determinam.

31. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(1, -1, 2)$ que contém a reta $x = t$, $y = t + 1$, $z = -3 + 2t$.

32. Encontre uma equação para o plano que contém a reta $x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 2t$ e é paralelo à reta de corte dos planos $-x + 2y + z = 0$ e $x + z + 1 = 0$.

Lista

33. Encontre uma equação para o plano cujos pontos são todos eqüidistantes de $(-1, -4, -2)$ e $(0, -2, 2)$.

34. Mostre que a reta

$$x - 5 = -t, \quad y + 3 = 2t, \quad z + 1 = -5t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

é paralela ao plano $-3x + y + z - 9 = 0$.

35. Mostre que as retas

$$x - 3 = 4t, \quad y - 4 = t, \quad z - 1 = 0 \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x + 1 = 12t, \quad y - 7 = 6t, \quad z - 5 = 3t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

são concorrentes e encontre o ponto de corte.

36. Encontre uma equação do plano que contém as retas do Exercício 35.

37. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.

(a) $-3x + 2y + z = -5$ e $7x + 3y - 2z = -2$
(b) $5x - 7y + 2z = 0$ e $y = 0$

38. Mostre que o plano que corta os eixos coordenados em $x = a$, $y = b$ e $z = c$ tem equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

desde que a, b e c sejam não-nulos.

39. Obtenha a distância entre o ponto e o plano.
(a) $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$
(b) $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$
(c) $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

40. Obtenha a distância entre os planos paralelos dados.
(a) $3x - 4y + z = 1$ e $6x - 8y + 2z = 3$
(b) $-4x + y - 3z = 0$ e $8x - 2y + 6z = 0$
(c) $2x - y + z = 1$ e $2x - y + z = -1$

41. Mostre que se a, b e c são não-nulos, então a reta

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

consiste de todos os pontos (x, y, z) que satisfazem

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas são as ***equações simétricas*** da reta.

42. Encontre as equações simétricas das retas das partes (a) e (b) do Exercício 9. [***Observação***. Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

43. Em cada parte, encontre equações de dois planos cuja interseção é a reta dada.
(a) $x = 7 - 4t$, $y = -5 - 2t$, $z = 5 + t$ $(-\infty < t < +\infty)$
(b) $x = 4t$, $y = 2t$, $z = 7t$ $(-\infty < t < +\infty)$
[***Sugestão***. Cada igualdade das equações simétricas de uma reta representa um plano contendo a reta. Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

44. Dois planos que se cortam no espaço tridimensional determinam dois ângulos de interseção, um agudo $(0 \leq \theta \leq 90°)$ e seu suplemento $180° - \theta$ (veja figura). Se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são vetores não-nulos normais aos planos, então o ângulo entre $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ é θ ou $180° - \theta$, dependendo dos sentidos das normais (veja figura). Em cada parte, encontre o ângulo agudo de interseção dos planos até o grau mais próximo.
(a) $x = 0$ e $2x - y + z - 4 = 0$
(b) $x + 2y - 2z = 5$ e $6x - 3y + 2z = 8$
[***Observação***. É necessária uma calculadora.]

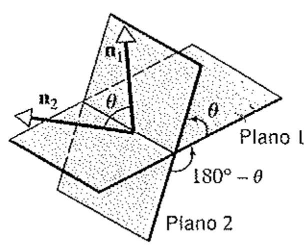

Figura Ex-44

45. Encontre o ângulo agudo entre o plano $x - y - 3z = 5$ e a reta $x = 2 - t$, $y = 2t$, $z = 3t - 1$ até o grau mais próximo. [***Sugestão***. Veja o Exercício 44.]

Discussão e Descoberta

46. O que as retas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - t\mathbf{v}$ têm em comum? Explique.
47. Qual é a relação entre a reta $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$ e o plano $ax + by + cz = 0$? Explique seu raciocínio.
48. Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ vetores da origem aos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, respectivamente. O que a equação

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2 \ (0 \leq t \leq 1)$$

representa geometricamente? Explique seu raciocínio.
49. Escreva as equações paramétricas para duas retas perpendiculares que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0).