Felizmente, isto não ocorre e, para ver porque, nós só precisamos lembrar que

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- O sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é determinado pela regra da mão direita.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Estas três propriedades determinam o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ completamente: a primeira e a segunda propriedades determinam a direção e sentido e a terceira propriedade determina o comprimento. Como estas propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dependem somente dos comprimentos e das posições relativas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e não do particular sistema de coordenadas de mão direita que estamos usando, o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ permanecerá inalterado se introduzirmos um outro sistema de coordenadas de mão direita. Assim, nós dizemos que a definição de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ***independente de coordenadas***. Este resultado é importante para físicos e engenheiros que, muitas vezes, trabalham com vários sistemas de coordenadas em um mesmo problema.

EXEMPLO 6 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Independente do Sistema de Coordenadas

Considere dois vetores perpendiculares $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cada um de comprimento 1 (Figura 3.4.10*a*). Se nós introduzirmos um sistema de coordenadas xyz como indicado na Figura 3.4.10*b*, então

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

No entanto, introduzindo um sistema de coordenadas como mostra a Figura 3.4.10*c*, temos

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

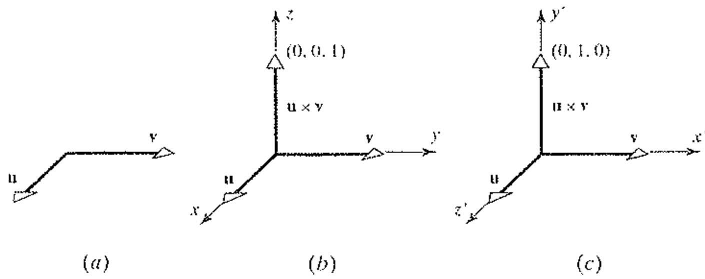

Figura 3.4.10

No entanto, a partir das Figuras 3.4.10*b* e 3.4.10*c* é claro que o vetor (0, 0, 1) no sistema xyz coincide com o vetor (0, 1, 0) no sistema $x'y'z'$. Assim, obtemos o mesmo vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, tanto usando coordenadas do sistema xyz quanto usando coordenadas do sistema $x'y'z'$. ◆

Conjunto de Exercícios 3.4

1. Sejam $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$ e $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Calcule
   (a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
   (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$
2. Encontre um vetor que é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   (a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$
3. Encontre a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
   (a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$
   (c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$
4. Encontre a área do triângulo de vértices P, Q e R.
   (a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(4, 6, 2)$ (b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(6, 1, 8)$
5. Verifique o Teorema 3.4.1 para os vetores $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$.
6. Verifique as partes (*a*), (*b*) e (*c*) do Teorema 3.4.2 para $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$ e $k = -5$.
7. Encontre um vetor $\mathbf{v}$ que é ortogonal ao vetor $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$.
8. Encontre o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
   (a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$
   (b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$
9. Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Encontre
   (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$
10. Obtenha o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
   (a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$ (b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

11. Determine se **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano quando seus pontos iniciais coincidem.
   (a) $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$
   (b) $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$
   (c) $\mathbf{u} = (4, -8, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (3, -4, 12)$
12. Encontre todos os vetores unitários paralelos ao plano yz que são perpendiculares ao vetor $(3, -1, 2)$.
13. Encontre todos os vetores unitários do plano determinado por $\mathbf{u} = (3, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ que são perpendiculares ao vetor $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$.
14. Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Mostre que
$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$
15. Simplifique $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.
16. Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ e $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.
17. (a) Obtenha a área do triângulo de vértices A $(1, 0, 1)$, B $(0, 2, 3)$ e C $(2, 0, 1)$.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a altura do vértice C ao lado AB.
18. Mostre que se **u** é um vetor de um ponto qualquer de uma reta a um ponto P fora da reta e se **v** é um vetor paralelo à reta, então a distância entre P e a reta é dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / \|\mathbf{v}\|$.
19. Use o resultado do Exercício 18 para encontrar a distância entre o ponto P e a reta pelos pontos A e B:
   (a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ (b) $P(4, 3, 0)$, $A(2, 1, -3)$, $B(0, 2, -1)$
20. Prove: Se θ é o ângulo entre **u** e **v** e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, então $\operatorname{tg} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.
21. Considere o paralelepípedo de lados $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (1, 3, 3)$.
   (a) Encontre a área da face determinada por **u** e **v**.
   (b) Encontre o ângulo entre **u** e o plano contendo a face determinada por **v** e **w**.
   [***Observação.*** ***O ângulo entre um vetor e um plano*** é definido pelo complemento do ângulo θ entre o vetor e a normal do plano, tomado do $0 \leq \theta \leq \pi / 2$.]
22. Encontre um vetor **n** perpendicular ao plano determinado pelos pontos A $(0, -2, 1)$, B $(1, -1, -2)$ e C $(-1, 1, 0)$. [Veja observação no Exercício 21.]
23. Sejam **m** e **n** os vetores cujos componentes no sistema xyz da Figura 3.4.10 são $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.
   (a) Encontre os componentes de **m** e **n** no sistema $x'y'z'$ da Figura 3.4.10.
   (b) Calcule $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando os componentes do sistema xyz.
   (c) Calcule $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando os componentes do sistema $x'y'z'$.
   (d) Mostre que os vetores obtidos em (b) e (c) são iguais.
24. Prove as seguintes identidades.
   (a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$
25. Sejam **u**, **v** e **w** vetores não-nulos com o mesmo ponto inicial no espaço tridimensional mas tais que dois quaisquer deles não são colineares. Mostre que
   (a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no mesmo plano determinado por **v** e **w**.
   (b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está no mesmo plano determinado por **u** e **v**.
26. Prove a parte (d) do Teorema 3.4.1. [***Sugestão.*** Prove o resultado primeiro no caso $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, depois o caso $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e, por último, o caso $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Finalmente, prove o caso geral $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escrevendo $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$.]
27. Prove a parte (e) do Teorema 3.4.1. [***Sugestão.*** Aplique a parte (a) do Teorema 3.4.2 ao resultado da parte (d) do Teorema 3.4.1.]
28. Sejam $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$. Calcule $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ usando a técnica do Exercício 26; depois confira seu resultado calculando o produto diretamente.
29. Prove: Se **a**, **b**, **c** e **d** estão num mesmo plano, então $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.
30. É um teorema da geometria sólida que o volume de um tetraedro é dado por $\frac{1}{3}$ (área da base) · (altura). Use este resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores **a**, **b** e **c** é $\frac{1}{6}|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ (veja figura dada).

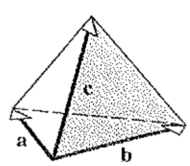

Figura Ex-30

31. Use o resultado do Exercício 30 para encontrar o volume do tetraedro de vértices P, Q, R e S.
   (a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 0, 1)$, $S(3, -2, 3)$
   (b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$
32. Prove a parte (b) do Teorema 3.4.2.
33. Prove as partes (c) e (d) do Teorema 3.4.2.
34. Prove as partes (e) e (f) do Teorema 3.4.2.

Discussão e Descoberta

35. (a) Suponha que **u** e **v** são vetores não-colineares com ponto inicial na origem do espaço tridimensional. Faça um esboço que ilustra como o vetor $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ está orientado em relação a **u** e a **v**.
(b) O que você sabe dizer sobre os valores de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.
36. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, é correto cancelar **u** de ambos os lados da equação $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.
37. Há alguma coisa errada com uma das seguintes expressões. Qual delas é e o que está errado?
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
38. O que você pode dizer sobre os vetores **u** e **v** se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$?
39. Dê alguns exemplos de regras algébricas que valem para a multiplicação de números reais mas que não valem para o produto vetorial de vetores?

3.5 RETAS E PLANOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Nesta seção nós utilizaremos vetores para deduzir equações de retas e planos no espaço tridimensional. Depois usaremos estas equações para resolver alguns problemas geométricos básicos.

Planos no Espaço Tridimensional Na Geometria Analítica, uma reta no espaço bidimensional pode ser especificada dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Similarmente, um plano no espaço tridimensional pode ser especificado dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Um método conveniente para descrever a inclinação de um plano é especificar um vetor não-nulo, chamado um vetor ***normal***, que é perpendicular ao plano.

Suponha que queremos encontrar a equação do plano que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e que tenha o vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. É evidente pela Figura 3.5.1 que o plano consiste precisamente dos pontos $P(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a **n**, ou seja,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (1)$$

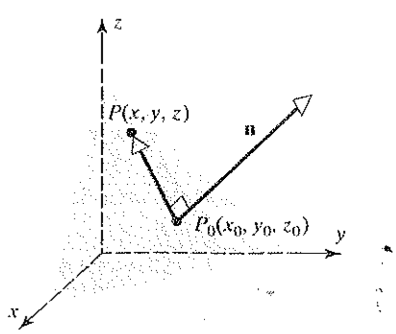

Figura 3.5.1 Plano com vetor normal.

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a Equação (1) pode ser escrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

Esta é a forma ***ponto-normal*** da equação de uma reta.

EXEMPLO 1 Encontrando a Equação Ponto-Normal de um Plano

Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $(3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$.

Solução.

Por (2), a forma ponto-normal é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$ ◆

Multiplicando e agrupando os termos, (2) pode ser reescrita na forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde a, b, c e d são constantes, com a, b e c não todas nulas. Por exemplo, a equação no Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Como o próximo teorema indica, os planos no espaço tridimensional são representados por equações da forma $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Teorema 3.5.1

Se a, b, c e d são constantes e a, b e c não são todas nulas, então o gráfico da equação

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \qquad (3)$$

é um plano com um vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

A equação (3) é uma equação linear em x, y e z, denominada a ***forma geral*** da equação de um plano.

Prova. Por hipótese, os coeficientes a, b e c não são todos nulos. Suponha, por enquanto, que $a \neq 0$. Então a equação $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ pode ser reescrita na forma $a\,(x + (d\,/\,a)) + b\,y + c\,z = 0$. Mas isto é uma forma ponto-normal do plano passando pelo ponto $(-d\,/\,a, 0, 0)$ e tendo $\mathbf{n} = (a, b, c)$ como normal.

Se $a = 0$, então ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Uma simples modificação do argumento acima dá conta destes casos. ■

Assim como as soluções de um sistema de equações lineares