Conjunto de Exercícios 3.3

1. Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
   (a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$ (b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
   (c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$ (d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$
2. Em cada parte do Exercício 1, encontre o cosseno do ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
3. Determine se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou são ortogonais.
   (a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$ (b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
   (c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$ (d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$, $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$
4. Encontre a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ em $\mathbf{a}$.
   (a) $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$ (b) $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$
   (c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$ (d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$
5. Em cada parte do Exercício 4, encontre o componente vetorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.
6. Em cada parte, encontre $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}\|$.
   (a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{a} = (-4, -3)$ (b) $\mathbf{u} = (5, 6)$, $\mathbf{a} = (2, -1)$
   (c) $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$ (d) $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$
7. Sejam $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 6, 3)$ e $k = -4$. Verifique o Teorema 3.3.2 para estas quantidades.
8. (a) Mostre que $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (-b, a)$ são vetores ortogonais.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar dois vetores ortogonais a $\mathbf{v} = (2, -3)$.
   (c) Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a $(-3, 4)$.
9. Sejam $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, -1)$ e $\mathbf{w} = (7, 1)$. Calcule as seguintes expressões.
   (a) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (b) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}\|$ (c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
10. Encontre cinco vetores não-nulos distintos que são ortogonais a $\mathbf{u} = (5, -2, 3)$.
11. Use vetores para encontrar os cossenos dos ângulos internos do triângulo de vértices $(0, -1)$, $(1, -2)$ e $(4, 1)$.
12. Mostre que $A\ (3, 0, 2)$, $B\ (4, 3, 0)$ e $C\ (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?
13. Encontre um vetor unitário que é ortogonal a ambos $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.
14. Sejam $\mathbf{p} = (2, k)$ e $\mathbf{q} = (3, 5)$. Encontre k tal que
    (a) $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são paralelos
    (b) $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são ortogonais
    (a) o ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ é $\pi / 3$
    (a) o ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ é $\pi / 4$
15. Use a Fórmula (13) para calcular a distância entre o ponto e a reta.
    (a) $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$
    (b) $y = -4x + 2$; $(2, -5)$
    (c) $3x + y = 5$; $(1, 8)$
16. Mostre que vale a identidade $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.
17. Mostre que vale a identidade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.
18. Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas faces.
19. Sejam $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ os vetores unitários ao longo dos eixos x, y e z positivos de um sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional. Se $\mathbf{v} = (a, b, c)$ é um vetor não-nulo, então os ângulos α, β e γ entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente, são chamados ***ângulos diretores*** de $\mathbf{v}$ (veja a figura) e os números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os ***cossenos diretores*** de $\mathbf{v}$.
    (a) Mostre que $\cos\alpha = a / \|\mathbf{v}\|$.
    (b) Encontre $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.
    (c) Mostre que $\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
    (d) Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

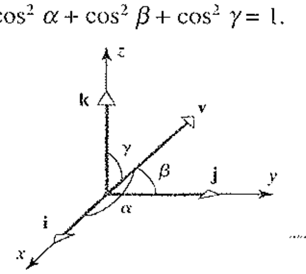

Figura Ex-19

20. Use o resultado do Exercício 19 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 c faz com as arestas da caixa. [*Observação.* É necessária uma calculadora.]

21. Em relação ao Exercício 19, mostre que dois vetores não-nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ do espaço tridimensional são perpendiculares se, e somente se, se cossenos diretores satisfazem

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$

22. Mostre que se $\mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$, para quaisquer escalares k_1 e k_2.

23. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam $k = \|\mathbf{u}\|$ e $l = \|\mathbf{v}\|$. Mostre que o vetor $\mathbf{w} = l\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Discussão e Descoberta

24. Em cada parte, há alguma coisa errada com a expressão. O que é?
(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ (d) $k\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

25. É possível ter $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a}$? Explique seu raciocínio.

26. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, é correto cancelar $\mathbf{u}$ de ambos os lados da equação $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ e concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.

27. Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores não-nulos mutuamente ortogonais no espaço tridimensional e suponha que você conhece os produtos escalares destes três vetores com um vetor $\mathbf{r}$ do espaço tridimensional. Obtenha uma expressão para $\mathbf{r}$ em termos de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e dos produtos escalares. [*Sugestão.* Procure obter uma expressão do tipo $\mathbf{r} = b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}$.]

28. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais do espaço bi ou tridimensional. Qual é o teorema famoso descrito pela equação $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$? Faça uma figura para corroborar sua resposta.

3.4 PRODUTO VETORIAL

Em muitas aplicações de vetores a problemas geométricos, físicos e de engenharia é de interesse construir um vetor no espaço tridimensional que é perpendicular a dois vetores dados. Nesta seção nós iremos mostrar como fazer isto.

Produto Vetorial de Vetores Lembre da Seção 3.3 que o produto escalar de dois vetores nos espaços bi e tridimensionais produz um escalar. Nós iremos definir agora um tipo de multiplicação vetorial que produz um vetor como produto, mas que é aplicável somente ao espaço tridimensional.

Definição

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são vetores no espaço tridimensional, então o produto vetorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) \tag{1a}$$

ou em notação de determinante,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \tag{1b}$$

OBSERVAÇÃO. Em vez de memorizar (1b), você pode obter os componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como segue:

- Forme a matriz 2×3 dada por $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$, cuja primeira linha contém os componentes de $\mathbf{u}$ e cuja segunda linha contém os componentes de $\mathbf{v}$.
- Para obter o primeiro componente de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, delete a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, delete a segunda coluna e tome o negativo do determinante; e para obter o terceiro componente, delete a terceira coluna e tome o determinante.

EXEMPLO 1 Calculando um Produto Vetorial

Encontre $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Solução.

Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, nós temos

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)$$
$$= (2, -7, -6)$$

Existe uma diferença importante entre o produto escalar e o produto vetorial de dois vetores—o produto escalar é um escalar e o produto vetorial é um vetor. O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial e também mostra que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Teorema 3.4.1 Relações entre os Produtos Escalar e Vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores no espaço tridimensional, então:*

(*a*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{u}$)
(*b*) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{v}$)
(*c*) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (*identidade de Lagrange*)
(*d*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)
(*e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$ (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)