Da definição do produto $k\mathbf{v}$, o comprimento do vetor $k\mathbf{v}$ é $|k|$ vezes o comprimento do vetor $\mathbf{v}$. Em forma de equação, esta afirmação diz que

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| \qquad (5)$$

Esta fórmula útil é aplicável tanto no espaço bi quanto tridimensional.

Conjunto de Exercícios 3.2

1. Encontre a norma de $\mathbf{v}$.
   (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 3)$ (c) $\mathbf{v} = (-5, 0)$
   (d) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$ (e) $\mathbf{v} = (-7, 2, -1)$ (f) $\mathbf{v} = (0, 6, 0)$
2. Encontre a distância entre P_1 e P_2.
   (a) $P_1(3, 4)$, $P_2(5, 7)$ (b) $P_1(-3, 6)$, $P_2(-1, -4)$
   (c) $P_1(7, -5, 1)$, $P_2(-7, -2, -1)$ (d) $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(6, 0, 3)$
3. Sejam $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$. Em cada parte calcule a expressão dada.
   (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$
   (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (e) $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$
4. Seja $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.
5. Sejam $\mathbf{u} = (7, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (9, 6, 6)$, $\mathbf{w} = (2, 1, -8)$, $k = -2$ e $l = 5$. Verifique que estes vetores e escalares satisfazem as seguintes identidades do Teorema 3.2.1.
   (a) parte (*b*) (b) parte (*e*) (c) parte (*f*) (d) parte (*g*)
6. (a) Mostre que se $\mathbf{v}$ é qualquer vetor não-nulo, então $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ é um vetor unitário.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (3, 4)$.
   (c) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (-2, 3, -6)$.
7. (a) Mostre que os componentes do vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ mostrado na figura são $v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ e $v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar os componentes de $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são os vetores dados na figura.

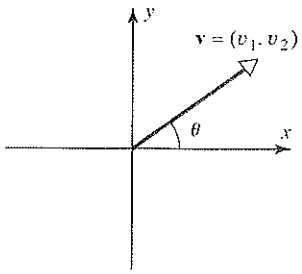

Figura Ex-7 (a)

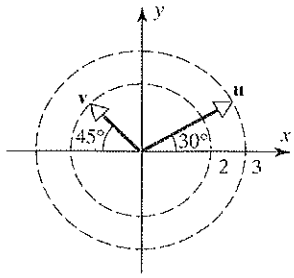

Figura Ex-7 (b)

8. Sejam $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) para os quais $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.
9. Prove geometricamente que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores no espaço bi ou tridimensional então $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
10. Prove analiticamente as partes (*a*), (*c*) e (*e*) do Teorema 3.2.1.
11. Prove analiticamente as partes (*d*), (*g*) e (*h*) do Teorema 3.2.1.

Discussão e Descoberta

12. É possível ter a igualdade $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ na desigualdade enunciada no Exercício 9? Explique seu raciocínio.
13. (a) Qual relação deve satisfazer o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ para estar eqüidistante da origem e do plano xz? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de a, b e c.
    (b) Qual relação deve satisfazer o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ para estar mais longe da origem do que do plano xz? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de a, b e c.
14. (a) O que a desigualdade $\|\mathbf{x}\| < 1$ diz sobre o ponto $\mathbf{x}$?
    (b) Obtenha uma desigualdade que descreve o conjunto de pontos $\mathbf{x}$ que estão fora do círculo de raio 1 centrado no ponto $\mathbf{x}_0$.

15. Os triângulos na figura dada deveriam sugerir uma prova geométrica do Teorema 3.2.1(f) para o caso $k > 0$. Dê a prova.

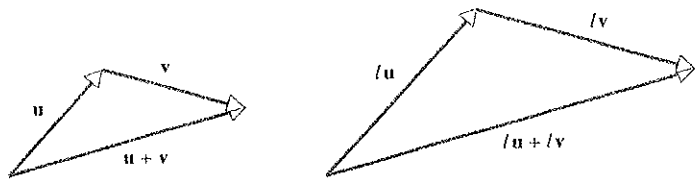

Figura Ex-15

3.3 PRODUTO ESCALAR; PROJEÇÕES

Nesta seção nós iremos discutir uma maneira importante de multiplicar vetores nos espaços bi e tridimensionais. Depois daremos algumas aplicações desta multiplicação à geometria.

Produto Escalar de Vetores Sejam **u** e **v** dois vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e suponha que estes vetores foram posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem. Pelo ***ângulo entre* u *e* v** nós entendemos o ângulo θ determinado por **u** e **v** que satisfaz $0 \le \theta \le \pi$ (Figura 3.3.1).

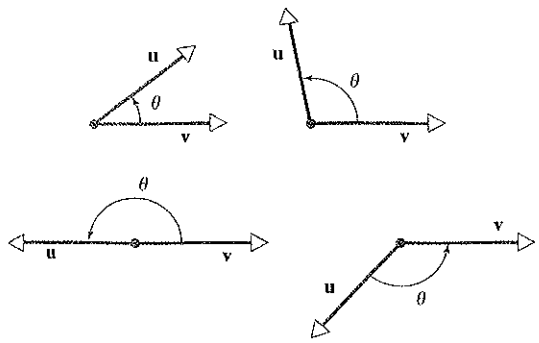

Figura 3.3.1 O ângulo θ entre **u** e **v** satisfaz $0 \le \theta \le \pi$.

Definição

Se **u** e **v** são vetores no espaço bi ou tridimensional e θ é o ângulo entre **u** e **v**, então o ***produto escalar*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ou ***produto interno euclidiano***, é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta & \text{se } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1}$$

EXEMPLO 1 Produto Escalar

Conforme indicado na Figura 3.3.2, o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$ é de 45°. Logo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2})(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \quad \blacklozenge$$

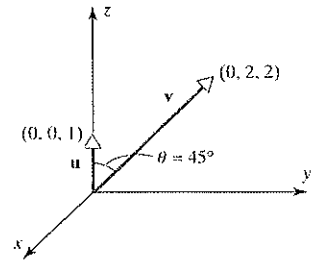

Figura 3.3.2

Produto Escalar em termos de Componentes Para efeitos de cálculo, é desejável ter uma fórmula que dê o produto escalar de dois vetores em termos dos componentes do vetor. Nós iremos deduzir uma fórmula destas para vetores no espaço tridimensional; a dedução em duas dimensões é similar.

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vetores não-nulos. Se o ângulo entre **u** e **v** é θ, conforme Figura 3.3.3, então a lei dos cossenos dá

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{2}$$

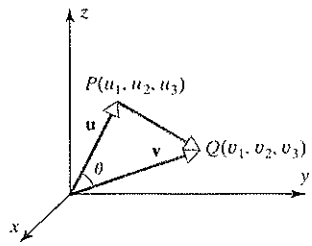

Figura 3.3.3

Como $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, podemos rescrever (2) como

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Substituindo

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

e

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

e simplificando, obtemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3}$$

Embora esta fórmula tenha sido deduzida supondo que **u** e **v** são não-nulos, ela também é válida se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (verifique).