$$\mathbf{v} = (7-2, 5-(-1), (-8)-4) = (5, 6, -12)$$ ◆

No espaço bidimensional o vetor com ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Translação de Eixos A solução de muitos problemas pode ser simplificada pela translação dos eixos coordenados para obter novos eixos paralelos aos originais.

Na Figura 3.1.14*a* nós transladamos os eixos de um sistema de coordenadas xy para obter um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem O' está no ponto $(x, y) = (k, l)$. Um ponto P no espaço bidimensional tem agora tanto coordenadas (x, y) quanto coordenadas (x', y'). Para ver como as duas coordenadas estão relacionadas, considere o vetor $\overrightarrow{O'P}$ (Figura 3.1.14*b*). No sistema xy, seu ponto inicial está em (k, l) e seu ponto final está em (x, y), de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x-k, y-l)$. No sistema $x'y'$ seu ponto inicial está em $(0, 0)$ e seu ponto final em (x', y'), de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$, e portanto

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l$$

Estas fórmulas são chamadas ***equações de translação***.

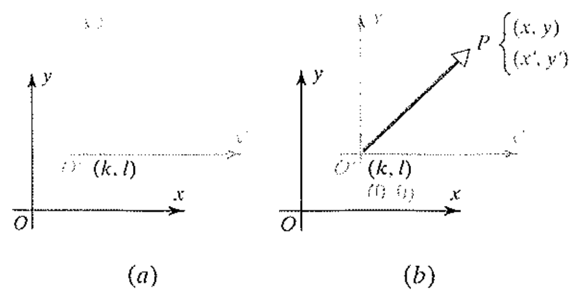

Figura 3.1.14

EXEMPLO 3 Utilizando as Equações de Translação

Suponha que um sistema de coordenadas xy é transladado para um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem tem coordenadas xy dadas por $(k, l) = (4, 1)$.

(a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto com coordenadas xy dadas por $P\,(2, 0)$.
(b) Encontre as coordenadas xy do ponto com coordenadas $x'y'$ dadas por $Q\,(-1, 5)$.

Solução (a). As equações de translação são

$$x' = x - 4, \qquad y' = y - 1$$

e portanto as coordenadas $x'y'$ de $P\,(2, 0)$ são $x' = 2 - 4 = -2$ e $y' = 0 - 1 = -1$.

Solução (b). As equações de translação em (a) podem ser reescritas como

$$x = x' + 4, \qquad y = y' + 1$$

e portanto as coordenadas xy de Q são $x = -1 + 4 = 3$ e $y = 5 + 1 = 6$. ◆

As equações de translação no espaço tridimensional são

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l, \qquad z' = z - m$$

onde (k, l, m) são as coordenadas xyz da origem das coordenadas $x'y'z'$.

Conjunto de Exercícios 3.1

1. Desenhe um sistema de coordenadas de mão direita e marque os pontos cujas coordenadas são
(a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$ (d) $(3, 4, -5)$
(e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, 4, -5)$ (g) $(3, -4, -5)$ (h) $(-3, -4, -5)$
(i) $(-3, 0, 0)$ (j) $(3, 0, 3)$ (k) $(0, 0, -3)$ (l) $(0, 3, 0)$

2. Esboce os seguintes vetores com ponto inicial na origem:
(a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ (c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (5, -4)$ (e) $\mathbf{v}_5 = (3, 0)$
(f) $\mathbf{v}_6 = (0, -7)$ (g) $\mathbf{v}_7 = (3, 4, 5)$ (h) $\mathbf{v}_8 = (3, 3, 0)$ (i) $\mathbf{v}_9 = (0, 0, -3)$

3. Encontre os componentes do vetor de ponto inicial P_1 e ponto final P_2.
(a) $P_1(4, 8)$, $P_2(3, 7)$ (b) $P_1(3, -5)$, $P_2(-4, -7)$ (c) $P_1(-5, 0)$, $P_2(-3, 1)$
(d) $P_1(0, 0)$, $P_2(a, b)$ (e) $P_1(3, -7, 2)$, $P_2(-2, 5, -4)$ (f) $P_1(-1, 0, 2)$, $P_2(0, -1, 0)$
(g) $P_1(a, b, c)$, $P_2(0, 0, 0)$ (h) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(a, b, c)$

4. Encontre um vetor não-nulo $\mathbf{u}$ com ponto inicial $P\,(-1, 3, -5)$ tal que
(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$
(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$

5. Encontre um vetor não-nulo **u** com ponto final Q (3, 0, −5) tal que
   (a) **u** tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$
   (b) **u** tem a mesma direção mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$
6. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Encontre os componentes de
   (a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$ (d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$ (e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$ (f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$
7. Sejam **u**, **v** e **w** os vetores do Exercício 6. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.
8. Sejam **u**, **v** e **w** os vetores do Exercício 6. Encontre escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (2, 0, 4)$.
9. Mostre que não existem escalares c_1, c_2 e c_3 tais que
$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4).$$
10. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que
$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0).$$
11. Sejam P o ponto (2, 3, −2) e Q o ponto (7, −4, 1).
   (a) Encontre o ponto médio do segmento de reta que liga P a Q.
   (b) Encontre o ponto no segmento de reta que liga P a Q que está a $\frac{3}{4}$ do caminho de P a Q.
12. Suponha que um sistema de coordenadas xy é transladado a um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem O' tem coordenadas (2, −3) no sistema xy.
   (a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto P cujas coordenadas xy são (7, 5).
   (b) Encontre as coordenadas xy do ponto Q cujas coordenadas $x'y'$ são (−3, 6).
   (c) Desenhe os eixos coordenados xy e $x'y'$ e marque os pontos P e Q.
13. Suponha que um sistema de coordenadas xyz é transladado a um sistema de coordenadas $x'y'z'$. Seja **v** um vetor cujos componentes no sistema xyz são $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Mostre que **v** tem os mesmos componentes no sistema $x'y'z'$.
14. Encontre os componentes de **u**, **v**, **u** + **v** e **u** − **v** para os vetores dados na figura.

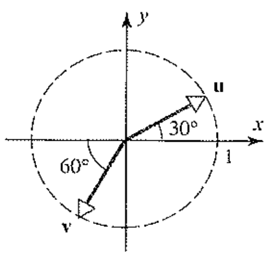

Figura Ex-14

15. Prove geometricamente que se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, então $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$. (Restrinja a prova ao caso $k > 0$ ilustrado na Figura 3.1.8. A prova completa envolve vários casos que dependem do sinal de k e do quadrante no qual cai o vetor.)

Discussão e Descoberta

16. Considerando a Figura 3.1.13, discuta a interpretação geométrica do vetor
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$
17. Desenhe uma figura que mostra quatro vetores não-nulos cuja soma é zero.
18. Se você tivesse quatro vetores não-nulos dados, como você construiria geometricamente um quinto vetor que é igual à soma dos quatro dados? Faça um desenho para ilustrar seu método.

3.2 NORMA DE UM VETOR; ARITMÉTICA VETORIAL

Nesta seção nós estabeleceremos as regras básicas da aritmética vetorial.

Propriedades das Operações Vetoriais O seguinte teorema enumera as mais importantes propriedades de vetores nos espaços bi e tridimensionais.

Teorema 3.2.1 Propriedades da Aritmética Vetorial

Se **u**, **v** *e* **w** *são vetores de um espaço bi ou tridimensional e k e l são escalares, então valem as seguintes relações.*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
(e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$ (f) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$
(g) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$ (h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$