

NOTAS DE AULA

MAT 0130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES
 1º SEMESTRE DE 2024
 IME - USP
 SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

1. AULA DE 27 DE FEVEREIRO

Uma equação diferencial é uma equação envolvendo uma função e suas derivadas. Resolver a equação é encontrar funções que satisfaçam a equação dada. Se a função procurada depende só de uma variável real, a equação é chamada de equação diferencial ordinária. Nesta disciplina, vamos estudar apenas equações diferenciais ordinárias.

Na maioria dos casos, vamos denotar por x a variável independente e por y o nome da função procurada. Quando a variável independente for o tempo, ela será denotada por t , como no exemplo seguinte, que discute o tipo de equação diferencial mais simples que existe, o que se resolve simplesmente achando primitivas (ou antiderivadas, ou integrais indefinidas) de funções dadas.

1.1. **Queda Livre.** Seja y a altura de uma partícula que se move verticalmente em um campo de gravitação uniforme. Sua trajetória pode ser descrita por uma função $t \mapsto y(t)$, que denotaremos simplesmente por $y(t)$, t denotando o tempo. Seja g a aceleração da gravidade. Então a função y satisfaz a equação diferencial

$$(1) \quad y'' = -g$$

(o sinal negativo aparece pois aqui orientamos para cima o eixo dos y). Queremos resolver esta equação diferencial, ou seja, encontrar todas as funções $y(t)$ que a satisfazem.

Vamos supor que o domínio da função y é um intervalo da reta, que denotaremos por I . Sabemos do Cálculo que uma função $f(t)$, definida em um intervalo, tem derivada constante e igual a m , se e somente se ela é da forma $f(t) = mt + b$, para alguma constante b (que é igual ao valor de f em $t = 0$, caso 0 pertença ao domínio de f). Aplicando este resultado à função y' (no lugar de f), segue que existe uma constante C_1 tal que

$$(2) \quad y'(t) = -gt + C_1, \quad t \in I.$$

Sabemos do Cálculo como encontrar todas as primitivas de uma função polinomial de primeiro grau definida em um intervalo. Assim concluímos que y satisfaz (1) se e somente se existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$(3) \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \quad t \in I.$$

Vemos assim que a equação diferencial (1) possui infinitas soluções, parametrizadas pelas constantes C_1 e C_2 , que podem assumir quaisquer valores reais. A fórmula em (3) é chamada de *solução geral* da equação (1).

Suponhamos agora que 0 pertence ao domínio de y (pode ser, por exemplo, o instante de tempo em que se liga o cronômetro em um experimento), e que são conhecidas a posição inicial e a velocidade inicial da partícula, $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$. Substituindo essa informação em (3) e em (2), vem:

$$y_0 = C_2 \quad \text{e} \quad v_0 = C_1.$$

Ou seja, provamos que a única solução de (1) que satisfaz as *condições iniciais*

$$y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = v_0$$

é

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0$$

Vimos neste primeiro exemplo que a equação diferencial ordinária (1) possui infinitas soluções, mas só uma delas satisfaz certas condições iniciais. Este é um tema recorrente no estudo de equações diferenciais: decidir se existem soluções de uma equação diferencial e encontrar condições que garantam a unicidade da solução.

A única técnica que usamos para resolver a equação da queda livre foi o cálculo de integrais indefinidas. Em muitos casos, resolve-se uma equação diferencial usando artifícios que reduzam o problema a calcular uma integral indefinida, como no próximo exemplo.

1.2. Decaimento radioativo. Um átomo radioativo tem um núcleo “instável”, ou seja, ele pode emitir partículas. Essa emissão acarreta uma mudança na natureza do átomo, que se transforma em um outro elemento. O caso mais notável talvez seja o Carbono-14, que tem 6 prótons e 8 nêutrons e espontaneamente, em um momento incerto, emite um elétron. Nessa ocasião, um dos nêutrons se transforma em um próton. O núcleo resultante, com 7 prótons e 7 nêutrons, é o Nitrogênio-14, que é estável, ou seja, se não for perturbado por algum agente externo, manterá para sempre seus 7 prótons e 7 nêutrons. Quando o núcleo de Nitrogênio-14 é bombardeado por um nêutron, ocorre uma reação que resulta em um núcleo de Carbono-14 e um próton livre. Essa reação se dá naturalmente na alta atmosfera, região em que átomos de Nitrogênio-14 são expostos aos raios cósmicos.

Outro núcleo radioativo célebre é o Urânio-235 (92 prótons e 143 nêutrons) que, depois de emitir 4 elétrons e 7 partículas alfa (que consistem de dois nêutrons e dois prótons) se transforma no Chumbo-207 (82 prótons e 125 nêutrons), que é estável.

Para modelar matematicamente o decaimento radioativo, considera-se a função $x(t)$, em que t denota o tempo e x a concentração de átomos radioativos numa amostra de material que os contém. A hipótese que se faz é que todos os núcleos da amostra têm a mesma probabilidade de decair em um dado intervalo de tempo. Assim o número de núcleos que decaem no intervalo de tempo de t a $t + \Delta t$ será diretamente proporcional a Δt e ao número de átomos na amostra, que por sua vez é diretamente proporcional à concentração de núcleos radioativos na amostra. A variação da concentração Δx nesse intervalo de tempo (que também é proporcional ao número de átomos que decaem no intervalo de tempo Δt , com uma constante de proporcionalidade negativa) é portanto dada aproximadamente por $\Delta x \cong -kx(t)\Delta t$, em que k é uma constante positiva, ou seja,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong -kx(t).$$

Este não é o valor exato, pois $x(t)$ varia com o tempo. Mas essa será uma aproximação tanto melhor quando menor for Δt . No limite, quando Δt tende a zero, chegamos à equação diferencial

$$(4) \quad x' = -kx,$$

em que k é uma constante positiva que depende só do material radioativo. A equação (4) está escrita de maneira abreviada, como é usual no estudo de equações diferenciais ordinárias. O que ela quer dizer é, na verdade,

$$x'(t) = -kx(t), \quad \text{para todo } t \in I,$$

sendo I o intervalo onde a função x está definida.

A leitora familiar com as regras de derivação do Cálculo talvez consiga adivinhar uma solução de (4), lembrando primeiro que a derivada da função exponencial é igual a ela própria e que quando se compõe a função exponencial com a função $(-kt)$, a derivada então sairá multiplicada por $-k$. Estou querendo dizer que não é muito difícil descobrir que a função $x(t) = e^{-kt}$ é solução de (4). Mesmo que não se “descubra” essa solução, é muito fácil verificar que, de fato, $x(t) = e^{-kt}$ é uma solução de (4). Pode ficar para alguns a sensação de que essa solução “caiu do céu”, mas, paciência, com o tempo vai parecer mais natural que $x(t) = e^{-kt}$ é uma solução de (4).

Conhecida uma solução particular de (4), devemos agora abordar o problema de determinar todas as possíveis soluções de (4). Uma observação preliminar é que, se $x(t)$ for uma solução de (4) e C for uma constante, então $Cx(t)$ também é uma solução. De fato, se $x' = -kx$, então

$$(Cx)' = Cx' = C(-kx) = -k(Cx)$$

(ou, mais explicitamente, $(Cx)'(t) = Cx'(t) = C(-kx(t)) = -k(Cx(t))$, para todo $t \in I$). É natural portanto perguntar se toda solução de (4) é da forma Ce^{-kt} , para alguma constante C . Sim, isto é verdade, como demonstraremos em seguida. A estratégia da demonstração é supor dada uma solução $x(t)$ de (4) e provar que $x(t) = Ce^{-kt}$ para alguma constante C , o que é equivalente a provar que $e^{kt}x(t)$ é constante, o que é equivalente a provar que a derivada de $e^{kt}x(t)$ é nula (pois a função está definida em um intervalo). Isto é facilmente verificado usando a regra do produto para a derivação e a equação que x satisfaz:

$$(e^{kt}x(t))' = (e^{kt})'x(t) + e^{kt}x'(t) = ke^{kt}x(t) + e^{kt}x'(t) = e^{kt}(kx(t) + x'(t)) = 0$$

(na última igualdade, usamos (4), que é equivalente a $x' + kx = 0$). Concluimos assim que toda solução de (4) é da forma $x(t) = Ce^{kt}$ para alguma constante real C , o que é o mesmo que dizer que

$$x(t) = Ce^{kt}$$

é a solução geral de (4).

Uma maneira equivalente de argumentar para chegar à solução geral de (4) é a seguinte. A equação (2) é equivalente a

$$x' + kx = 0.$$

Multiplicando esta equação por e^{kt} e usando a regra do produto, vemos que ela é equivalente a

$$(e^{kt}x)' = 0,$$

cujas soluções gerais são $e^{kt}x = C$, C constante arbitrária, ou seja, $x(t) = Ce^{-kt}$.

Se for conhecido o valor de x em $t = 0$, $x(0) = x_0$, vem que $x_0 = C$ e portanto $x(t) = x_0e^{-kt}$. Em outras palavras, a única solução do *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' &= -kx \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

é

$$(5) \quad x(t) = x_0e^{-kt}.$$

A fórmula em (5) permite prever qual será a concentração de material radioativo depois de decorrido um tempo t se for conhecida a concentração no instante $t = 0$. Reciprocamente, se soubermos que, no passado, em algum momento, a concentração era x_0 e medirmos que agora a concentração é x , concluimos que decorreu um tempo

$$(6) \quad t = -\frac{1}{k} \log \frac{x}{x_0}$$

desde aquele instante em que a concentração era x_0 . Este raciocínio é usado no processo de *datação por Carbono-14*, como discutimos a seguir.

Na atmosfera terrestre, a concentração de Carbono-14 é constante, resultado do equilíbrio entre a formação de Carbono-14 na alta atmosfera e o decaimento do Carbono-14 na biosfera. Os átomos de Carbono-14 das moléculas de gás carbônico são absorvidos pelas plantas através da fotossíntese e entram na composição das moléculas que servem de alimento aos animais. O resultado é que a concentração de Carbono-14 nos seres vivos se mantém também constante e igual à concentração de Carbono-14 na atmosfera. Quando um ser vivo morre, ele para de ingerir novos átomos de carbono (seja através da fotossíntese ou da alimentação) e a concentração de Carbono-14 em seus restos mortais começa a se reduzir respeitando a fórmula (5). Quando, tempos depois, um ser vivo inteligente e com capacidade tecnológica e conhecimento científico avançados encontra uma amostra daqueles restos mortais, ele pode medir x e, dado que as constantes físicas k e x_0 são conhecidas, determinar a data no passado em que aquele ser vivo morreu, usando a fórmula (6).

2. AULA DE 1 DE MARÇO

2.1. Modelos Populacionais. Fazendo uma busca na internet, o leitor pode encontrar afirmações como a seguinte: a taxa de crescimento da população brasileira caiu de 2,99% em 1960 para 0,52% em 2022. Isto quer dizer que o aumento da população brasileira em 1960 foi 2,99% do número de habitantes no começo do ano e analogamente para 2022.

Modelos matemáticos que tentam detectar as leis que regem a variação de uma população frequentemente consideram que o número de habitantes é uma variável real, apesar de, a rigor, ele ser sempre um número inteiro. Essa é uma aproximação realista no caso de grandes populações. Denotemos por $x(t)$ a função que dá a população (de uma certa espécie, em uma certa região) como função do tempo. A grandeza $\frac{x'(t)}{x(t)}$ é interpretada então como a taxa de crescimento da população. Uma aproximação para esse valor, supondo que não haja variações bruscas em $x'(t)$, é

$$\frac{\left(\frac{x(t+1)-x(t)}{1}\right)}{x(t)} = \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)}$$

Também se costuma chamar essa aproximação de taxa de variação anual da população de um país, quando o tempo t é medido em anos.

O modelo populacional mais simples estipula que a taxa de crescimento da população é constante (modelo malthusiano). Este modelo pressupõe que não há falta de espaço ou de alimentos, nem a ação de predadores, que restrinjam o crescimento de uma população. A equação diferencial que rege o crescimento da população, de acordo com o modelo malthusiano, é $x' = ax$, em que a é uma constante positiva. Essa equação é idêntica à equação do decaimento radioativo, a menos do sinal da constante que multiplica x no segundo membro. A mesma análise que usamos para estudar o decaimento radioativo se aplica também aqui. Concluímos que a (única) solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

é $x(t) = x_0 e^{at}$, ou seja, a população cresce exponencialmente (pois $a > 0$), o que é insustentável no longo prazo.

Um modificação do modelo malthusiano que leva a aproximações mais realistas é o modelo de Verhulst, um belga do século 19 (ver, por exemplo, [1, Seção 2.3]). Verhulst supôs que a taxa de crescimento da população é decrescente e é uma função polinomial de primeiro grau de x ,

$$(7) \quad x' = (a - bx)x$$

ou, equivalentemente,

$$(8) \quad x' = ax - bx^2,$$

a e b constantes positivas. Um artifício devido a Jacob Bernoulli permite transformar essa equação em uma equação mais simples, semelhante às que acabamos de resolver. Consiste em procurar a equação que a função $z = 1/x$ satisfaz. É o que se chama de uma *mudança da variável dependente*. Usando as técnicas de derivação do Cálculo (pode-se invocar a regra do quociente ou a regra da cadeia), temos $x' = -\frac{z'}{z^2}$. Substituindo esta equação e $x = 1/z$ em (8), vem

$$-\frac{z'}{z^2} = a\frac{1}{z} - b\frac{1}{z^2},$$

que é equivalente a

$$(9) \quad z' + az = b.$$

Já vimos que o primeiro membro de (9) multiplicado por e^{at} é igual a $(e^{at}z(t))'$. Multiplicando os dois membros de (9) por e^{at} , vemos que (9) é equivalente a

$$(e^{at}z)' = be^{at},$$

ou seja, $e^{at}z(t)$ é uma primitiva de be^{at} . Sabemos do Cálculo que qualquer primitiva de be^{at} (definida em um intervalo) é da forma $\frac{b}{a}e^{at} + C$, onde C é uma constante. Concluímos assim que z satisfaz (9) se e somente se

$$e^{at}z(t) = \frac{b}{a}e^{at} + C, \text{ ou seja, } z(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

Como $x = 1/z$, obtemos a seguinte família de soluções de (8):

$$x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-at}} = \frac{a}{b + aCe^{-at}}.$$

Como C é uma constante arbitrária e $a > 0$, aC também é uma constante arbitrária. Como um leve abuso de notação, usual no estudo de equações diferenciais, podemos reescrever esta família de soluções de (8) como

$$(10) \quad x(t) = \frac{a}{b + Ce^{-at}}.$$

As soluções que encontramos por este método nunca se anulam, como tinha de ser, pois fizemos a mudança de variável $z = 1/x$. Será que existem soluções que se anulam? Uma solução que salta aos olhos é a função identicamente nula, $x(t) = 0$ para todo t , que obviamente satisfaz (8). Será que (8) possui alguma solução que se anula em algum ponto do domínio, mas não em todos? A resposta também é não. Mais precisamente, podemos afirmar:

Proposição 1. *Suponha que $x(t)$ é uma solução de (8) definida em um intervalo I tal que $x(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in I$. Então $x(t) = 0$ para todo I .*

Demonstração: Por absurdo, suponhamos que existe $t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, tal que $x(t_1) > 0$. Seja t_2 o ínfimo do conjunto de todos os s , $t_0 < s < t_1$, tais que $x(t) > 0$ para todo t no intervalo aberto (s, t_1) . Então $t_0 \leq t_2 < t_1$, $x(t_2) = 0$ e $x(t) > 0$ para todo t no intervalo aberto (t_2, t_1) . A restrição de x ao intervalo aberto (t_2, t_1) é uma solução de (8) que nunca se anula, logo existe constante C tal que $x(t) = \frac{a}{b + Ce^{-at}}$ para todo $t \in (t_2, t_1)$. Por outro lado, como $x(t)$ é contínua no intervalo I e $t_2 \in I$, teríamos de ter

$$\lim_{t \rightarrow t_2} \frac{a}{b + Ce^{-at}} = 0,$$

o que é impossível, pois $a > 0$ e $\lim_{t \rightarrow t_2} (b + Ce^{-at}) = b + Ce^{-at_2}$.

Provamos que não existe t_1 em I , $t_1 > t_0$, tal que $x(t_1) > 0$. Com argumentos quase iguais, demonstra-se que não existem em I $t_3 > 0$ tal que $x(t_3) < 0$, ou $t_4 < t_0$ tal que $x(t_4) > 0$, ou $t_5 < t_0$ tal que $x(t_5) < 0$. Logo $x(t) = 0$ para todo $t \in I$. \square

Agora que conhecemos todas as soluções de (8) (as funções dadas por (10) para alguma constante C e a função identicamente nula), dado (t_0, x_0) um ponto arbitrário em \mathbb{R}^2 , podemos resolver o problema de valor inicial associado a (8),

$$(11) \quad \begin{cases} x' &= ax - bx^2 \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}.$$

No caso em que $x_0 = 0$, a função identicamente nula, $x(t) = 0$ para todo t , é a única solução de (11). Suponhamos agora que $x_0 \neq 0$. Substituindo $t = t_0$ em (10), usando que $x(t_0) = x_0$ e resolvendo para C , vem

$$C = \frac{a - bx_0}{x_0} e^{at_0}.$$

Nossos cálculos mostram que a única solução do problema de valor inicial (11), no caso em que $x_0 \neq 0$, é

$$(12) \quad x(t) = \frac{a}{b + \frac{a - bx_0}{x_0} e^{-a(t - t_0)}}.$$

Note que quando $x_0 = \frac{a}{b}$, logo $a - bx_0 = 0$, a solução é constante, $x(t) = \frac{a}{b}$, para todo t . Era possível ter detectado a existência desta solução constante, ou *de equilíbrio*, por inspeção, simplesmente olhando para (7), cujos dois membros são nulos se x for constante e igual a $\frac{a}{b}$. Com estes cálculos, provamos algo mais: a solução constante e igual a $\frac{a}{b}$ é a única solução que satisfaz a condição inicial $x(t_0) = \frac{a}{b}$, para algum t_0 .

No caso em que $0 < x_0 < \frac{a}{b}$, temos $\frac{a-bx_0}{x_0} > 0$, logo $b + \frac{a-bx_0}{x_0}e^{-a(t-t_0)} > b$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo a solução do problema de valor inicial (11) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e satisfaz

$$(13) \quad 0 < x(t) < \frac{b}{a}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que vale (13), segue que $a - bx(t) > 0$ e $x(t) > 0$ para todo t e, portanto, usando (7), que $x'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta afirmação segue também diretamente de (12), pois

$$(14) \quad x'(t) = \frac{a^2}{\left(b + \frac{a-bx_0}{x_0}e^{-a(t-t_0)}\right)^2} \frac{a-bx_0}{x_0} e^{-a(t-t_0)} > 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Também segue de (12) que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a}{b}.$$

Mostramos que, se a população inicial estiver abaixo da população de equilíbrio, ela crescerá para o valor de equilíbrio quando o tempo tender a infinito. Procuraremos agora determinar o ponto de inflexão da solução neste caso.

Podemos derivar os dois membros de (8) usando a regra da cadeia e obter

$$x'' = ax' - 2bxx' = (a - 2bx)x'$$

Como a solução (12), no caso em que $0 < x_0 < \frac{a}{b}$, satisfaz $x'(t) > 0$ para todo t , segue então que $x''(t) > 0$ se $x(t) < \frac{a}{2b}$ e $x''(t) < 0$ se $x(t) > \frac{a}{2b}$. Ou seja, no instante em que $x(t) = \frac{a}{2b}$, o gráfico de x passa por um ponto de inflexão. Essa regra pode ser usada para prever a população de equilíbrio mesmo que não se conheçam os valores de a e b , pois um ponto de inflexão no gráfico de x pode ser determinado empiricamente, de maneira aproximada, marcando em um gráfico dados conhecidos. Caso um ponto de inflexão seja detectado, pode-se estimar que a população de equilíbrio será o dobro do valor da população no ponto de inflexão.

Quando $x_0 > \frac{a}{b}$ ou $x_0 < 0$, segue de (14) que $x'(t) < 0$ para todo t no domínio da solução. Nestes casos, o domínio não é a reta inteira pois o denominador se anula no ponto $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{-a(t_1-t_0)} = \frac{bx_0}{bx_0 - a}$$

O segundo membro da equação acima é positivo se $x_0 < 0$ (daí $a - bx_0 > 0$) ou se $a - bx_0 < 0$ (daí $x_0 > 0$). No caso em que $a - bx_0 < 0$, temos $\frac{bx_0}{bx_0 - a} > 1$ e portanto $t_1 < t_0$; logo o domínio da solução do problema de valor inicial é o intervalo aberto ilimitado $(t_1, +\infty)$ e $x(t)$ tende a $+\infty$ quando x tende a t_1 . No caso em que $x_0 < 0$, temos $0 < \frac{bx_0}{bx_0 - a} < 1$, logo $t_1 > t_0$, o domínio é $(-\infty, t_1)$ e $x(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow t_1$.

No caso relevante para o modelo populacional, $x_0 > \frac{a}{b}$, também vale que $x(t) \rightarrow \frac{a}{b}$ quando $t \rightarrow +\infty$. O fato de o valor da solução explodir quando $t \rightarrow t_1$, sendo $t_1 < t_0$, pode ser interpretado como querendo dizer que se o modelo fosse satisfeito desde sempre, seria impossível a população ter um valor maior do que o valor de equilíbrio $\frac{a}{b}$ num instante t_0 .

Veja na Figura 1, disponível em <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura1.jpg>, uma ilustração dos resultados que acabamos de descrever.

3. AULA DE 5 DE MARÇO

3.1. Mais Exemplos. Antes de enunciar teoremas de existência e unicidade, vamos estudar mais alguns exemplos. Nesta aula, e na maior parte do curso, as soluções das equações diferenciais serão funções denotadas por $y(x)$.

Consideremos a equação

$$(15) \quad xy' + y = x.$$

Esta equação já se apresenta como um problema de achar uma integral indefinida, pois o primeiro membro é igual à derivada em relação a x de $xy(x)$. Assim, temos

$$xy' + y = x \iff (xy)' = x \iff xy = \int x dx \iff xy = \frac{x^2}{2} + C.$$

Dividindo por x , obtemos a solução geral de (15):

$$(16) \quad y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das infinitas soluções que encontramos está definida para $x = 0$, aquela que se obtém fazendo $C = 0$. Assim, $y(x) = \frac{x}{2}$ é a única solução do problema de valor inicial

$$(17) \quad \begin{cases} xy' + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Já o problema de valor inicial

$$(18) \quad \begin{cases} xy' + y = x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

não tem solução se $y_0 \neq 0$. Dado (x_0, y_0) com y_0 arbitrário, a única solução do problema de valor inicial

$$(19) \quad \begin{cases} xy' + y = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{x_0(2y_0 - x_0)}{2x}.$$

O domínio maximal dessa solução é a reta \mathbb{R} se $2y_0 = x_0$, é o intervalo $(0, +\infty)$ se $2y_0 \neq x_0$ e $x_0 > 0$ e é o intervalo $(-\infty, 0)$ se $2y_0 \neq x_0$ e $x_0 < 0$.

Veja a Figura 2, disponível em <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura2.jpg>.

Consideremos em seguida a equação

$$(20) \quad y' + xy = x.$$

Para transformar o primeiro membro na derivada de um produto, devemos multiplicar os dois membros da equação por $e^{\frac{x^2}{2}}$ pois $(e^{\frac{x^2}{2}})' = xe^{\frac{x^2}{2}}$ e, daí

$$\begin{aligned} y' + xy = x &\iff e^{\frac{x^2}{2}}y' + xe^{\frac{x^2}{2}}y = xe^{\frac{x^2}{2}} \iff (e^{\frac{x^2}{2}}y)' = xe^{\frac{x^2}{2}} \iff \\ e^{\frac{x^2}{2}}y &= \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx \iff e^{\frac{x^2}{2}}y = e^{\frac{x^2}{2}} + C \iff y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ou seja, a solução geral de (20) é $y(x) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$. Conhecidas todas as soluções da equação, podemos mostrar em seguida que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial

$$(21) \quad \begin{cases} y' + xy = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única, pois existe um único valor de C tal que a equação $y_0 = 1 + Ce^{-\frac{x_0^2}{2}}$ é satisfeita, a saber, $C = (y_0 - 1)e^{-\frac{x_0^2}{2}}$.

Consideremos agora a seguinte pequena variação da equação (20)

$$(22) \quad y' + xy = 1.$$

O fator integrante de (22) é igual ao de (20), a dificuldade aqui é que a integral indefinida que aparece no lado direito da equação não pode ser resolvida em termos de funções elementares. Ainda assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} y' + xy = 1 &\iff e^{\frac{x^2}{2}}y' + xe^{\frac{x^2}{2}}y = e^{\frac{x^2}{2}} \iff (e^{\frac{x^2}{2}}y)' = e^{\frac{x^2}{2}} \iff \\ e^{\frac{x^2}{2}}y &= \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx \iff y = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

É correto afirmar que $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx$ é a solução geral de (22), pois no sinal da integral indefinida já está embutida uma constante arbitrária adicionada a alguma primitiva fixa determinada (que existe, embora não possa ser expressa em termos de funções elementares). Esta representação não é muito conveniente, entretanto, para provar que o problema de valor inicial

$$(23) \quad \begin{cases} y' + xy &= 1 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

tem solução única, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. É mais simples abordar o problema de achar a solução de (23) usando integrais definidas e funções definidas por integrais definidas com um limite variável, usando que (como vimos acima) que $y' + xy = 1 \iff (e^{\frac{x^2}{2}} y)' = e^{\frac{x^2}{2}}$. Fica mais fácil explicar os próximos passos mudando o nome da variável independente para t e reescrevendo a equação $(e^{\frac{x^2}{2}} y)' = e^{\frac{x^2}{2}}$ como

$$\frac{d}{dt}[e^{\frac{t^2}{2}} y(t)] = e^{\frac{t^2}{2}}$$

e, para cada $x \in \mathbb{R}$, calcular a integral definida de x_0 a x dos dois lados desta equação,

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{dt}[e^{\frac{t^2}{2}} y(t)] dt = \int_{x_0}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt.$$

Usando o teorema fundamental do cálculo no primeiro membro, e usando que $y(x_0) = y_0$, vem

$$e^{\frac{x^2}{2}} y(x) - e^{\frac{x_0^2}{2}} y_0 = \int_{x_0}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt,$$

que é equivalente a

$$(24) \quad y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x_0^2}{2}} y_0 + \int_{x_0}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \right).$$

Nossos cálculos demonstram que a única solução de (23) é dada por (24). Embora, a princípio, a fórmula (24), que dá a solução de (23), possa parecer pouco amigável ou pouco transparente, uma função definida por uma integral definida com limite variável, do ponto de vista conceitual, é tão boa quanto uma função que possa ser expressa por funções elementares.

Este último exemplo pode ser generalizado para coeficientes contínuos mais gerais. A demonstração do teorema seguinte é a dedução de uma fórmula análoga a (24) num contexto mais geral.

3.2. Existência e unicidade para a edo linear.

Teorema 2. *Sejam p e q funções contínuas definidas no intervalo I , sejam $x_0 \in I$ e $y_0 \in I$. Então existe uma única função com derivada contínua $y(x)$ definida em I tal que*

$$(25) \quad \begin{cases} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Demonstração: Defina $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$, $x \in I$. Segue do teorema fundamental do cálculo que $P'(x) = p(x)$, para todo $x \in I$, e, portanto, $(e^{P(x)})' = p(x)e^{P(x)}$. Além disso, $P(x_0) = 0$. A função $e^{P(x)}$ será o fator integrante de $y' + p(x)y = q(x)$, como vemos em seguida, e satisfaz $e^{P(x_0)} = 1$.

Temos

$$y' + p(x)y = q(x) \iff e^{P(x)} y' + e^{P(x)} p(x)y = q(x)e^{P(x)} \iff (e^{P(x)} y)' = q(x)e^{P(x)}$$

O próximo passo é integrar de x_0 a x esta última equação, e usar uma das versões do Teorema Fundamental do Cálculo ¹ juntamente com as informações $y(x_0) = y_0$ e $e^{P(x_0)} = 1$. Daí vem:

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{dt} [e^{P(t)} y(t)] dt = \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt. \iff e^{P(x)} y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt.$$

Isto prova que qualquer solução do problema de valor inicial (25) será dada por

$$(26) \quad y(x) = e^{-P(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt \right).$$

Mostremos em seguida que, reciprocamente, a função $y(x)$ definida em (26) de fato satisfaz o problema de valor inicial (25).

4. AULA DE 8 DE MARÇO

Substituindo $x = x_0$ em (26), vem:

$$y(x_0) = e^{P(x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x_0} q(t) e^{P(t)} dt \right) = y_0,$$

ou seja, a condição inicial $y(x_0) = y_0$ é satisfeita. A partir de (26), pode-se calcular $y'(x)$ usando que $P'(x) = p(x)$ e a segunda versão do Teorema Fundamental do Cálculo, ²

$$y'(x) = -e^{-P(x)} p(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt \right) + e^{-P(x)} q(x) e^{P(x)} = -p(x) y(x) + q(x), \quad \text{para todo } x \in I,$$

ou seja, a função definida em (26) satisfaz $y' + p(x)y = q(x)$. \square

Também é possível demonstrar, com técnicas muito mais sofisticadas, que o problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n com coeficientes contínuos tem solução única. Para garantir a unicidade é preciso prescrever o valor da função e de suas derivadas até a ordem $n-1$ em um ponto. Enunciamos em seguida sem demonstração o teorema para equações de ordem dois (veja, por exemplo, [2, Teorema 2.4]).

Teorema 3. *Sejam p, q e r funções contínuas definidas no intervalo I , e tome arbitrariamente $x_0 \in I, a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Então existe uma única função $y(x)$ definida em I satisfazendo*

$$(27) \quad \begin{cases} y'' + p(x)y + q(x)y &= r(x) \\ y(x_0) &= a \\ y'(x_0) &= b \end{cases}$$

Note que no caso em que $p(x) = q(x) = 0$ e $r(x) = -g$ para todo $x \in \mathbb{R}$, nós resolvemos (27) no primeiro exemplo da primeira aula.

4.1. Existência e Unicidade para a equação geral de primeira ordem. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Diremos que uma função $y(x)$, definida em um intervalo I , é uma solução da equação diferencial ordinária $y' = f(x, y)$ se, para todo $x \in I$, temos $(x, y(x)) \in \Omega$ e $y'(x) = f(x, y(x))$. Diremos que a função $y(x)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$(28) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

se, além de ela ser solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$, for verdade também que $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

¹Seja f uma função contínua definida no intervalo I , seja F uma primitiva de f , isto é $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Então, para quaisquer a e b em I , temos $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

²Seja f uma função contínua definida no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Dado $x_0 \in I$, defina $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, x \in I$. Então F é uma função derivável e satisfaz $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$ e $F(x_0) = 0$.

Teorema 4. *Sejam: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Então o problema de valor inicial (28) possui pelo menos uma solução.*

O Teorema 4 é conhecido com o Teorema de Peano [4, Section II.2]. No caso em que f é apenas contínua, a solução do problema de valor inicial pode não ser única. Por exemplo, $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = x^3$, ambas definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, são duas soluções distintas do problema de valor inicial

$$(29) \quad \begin{cases} y' &= 3y^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Diremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, é *localmente lipschitziana na segunda variável* se, para todo retângulo fechado $Q = [a, b] \times [c, d]$ contido em Ω , existir $C > 0$ tal que

$$(30) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C|y_2 - y_1|, \quad \text{para todos } (x, y_1) \text{ e } (x, y_2) \text{ em } Q.$$

Proposição 5. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ exista para todo $(x, y) \in \Omega$ e tal que $\frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua. Então f é localmente lipschitziana na segunda variável.*

Demonstração: Dados $Q = [a, b] \times [c, d]$ contido em Ω e $x \in [a, b]$, considere $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f(x, y)$. Segue da hipótese que g é uma função derivável em $[c, d]$. Dados $y_1, y_2 \in [c, d]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio a g e concluir que existe ξ entre y_1 e y_2 (em particular, $\xi \in [c, d]$) tal que

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = g(y_2) - g(y_1) = g'(\xi)(y_2 - y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_2 - y_1),$$

donde segue que

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y_2 - y_1| \leq \left(\sup_{(x, y) \in Q} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right) |y_2 - y_1|.$$

Isto prova que vale (30) com $C := \sup_{(x, y) \in Q} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$, que é finito, pois $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua e Q é fechado e limitado. \square

Teorema 6. *Sejam: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e localmente lipschitziana na segunda variável, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Então o problema de valor inicial (28) possui uma única solução, definida em um intervalo aberto maximal; mais precisamente, existe um intervalo aberto I e uma solução $y(x)$ de (28) definida em I tal que, se $z(x)$ for outra solução de (28) definida em um intervalo J , então $J \subset I$ e $z(x) = y(x)$ para todo $x \in J$.*

A existência e unicidade de uma solução definida em um intervalo suficientemente pequeno contendo x_0 , sob as hipóteses do Teorema 6, é chamado de Teorema de Picard e está demonstrado nas referências destas notas de aula e em diversos outros livros didáticos. A existência de um intervalo aberto maximal ao qual se pode estender essa solução é então uma consequência mais simples do Teorema de Picard. A leitora interessada em estudar uma demonstração completa do Teorema 6 pode consultar, por exemplo, as notas <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/edonotas.pdf>, originalmente escritas para a disciplina MAT 226 no segundo semestre de 2019.

Exemplo 7. Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial

$$(31) \quad \begin{cases} y' &= y^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

possui solução única, definida em um intervalo maximal aberto I . Esta afirmação é consequência do Teorema 6 pois $f(x, y) = y^2$ é contínua e possui derivada em relação a y contínua, logo, pela Proposição 5, é localmente lipschitziana na segunda variável, o que nos coloca em posição de invocar o Teorema 6. Neste caso, podemos explicitar a solução em termos de funções elementares e encontrar o intervalo maximal. É o que faremos em seguida.

Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, a solução identicamente nula, $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é a única solução do problema de valor inicial

$$(32) \quad \begin{cases} y' &= y^2 \\ y(x_0) &= 0 \end{cases},$$

cujo intervalo maximal é a reta inteira, \mathbb{R} . Se $y(x)$ é qualquer solução de $y' = y^2$ definida em um intervalo I e satisfazendo $y(x_1) \neq 0$ para algum $x_1 \in I$, então $y(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ (pois, se $y(x_0)$ se anulasse em algum $x_0 \in I$, $y(x)$ seria identicamente nula em I , pela unicidade da solução do problema de valor inicial (32)). Ou seja, se $y(x)$ é uma solução de $y' = y^2$, então ou $y(x)$ é identicamente nula ou $y(x)$ nunca se anula. Procuremos em seguida as soluções que nunca se anulam.

Se $y(x)$ é uma solução de $y' = y^2$ que nunca se anula, definida em um intervalo I , então temos, para todos x em I ,

$$y'(x) = y(x)^2 \iff \frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1 \iff \left[-\frac{1}{y(x)} \right]' = 1 \iff \frac{1}{y(x)} = -x + C \iff y(x) = \frac{1}{-x + C},$$

para alguma constante real C (a terceira igualdade é equivalente à segunda igualdade pela regra da cadeia). Na prática, essa sucessão de equivalências é escrita de maneira mais resumida usando a sugestiva notação $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \iff \frac{dy}{y^2} = dx \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \iff -\frac{1}{y} = x + C \iff y = -\frac{1}{x + C}$$

(a diferença de sinal na constante arbitrária é irrelevante, como já discutimos antes).

Agora que encontramos todas as soluções de $y' = y^2$, podemos resolver o problema de valor inicial (31) no caso em que $y_0 \neq 0$. Para tanto, basta substituímos x por x_0 e y por y_0 na fórmula para a solução geral $y(x) = \frac{1}{-x+C}$ e assim determinar o valor de C :

$$y_0 = \frac{1}{-x_0 + C} \iff -x_0 y_0 + y_0 C = 1 \iff C = \frac{1 + x_0 y_0}{y_0} = x_0 + \frac{1}{y_0},$$

logo $y(x) = \frac{1}{-x + x_0 + \frac{1}{y_0}}$, que tende a infinito quando x tende a $x_0 + \frac{1}{y_0}$. No caso em que $y_0 > 0$, portanto a única solução de (31) com seu respectivo intervalo maximal de definição é

$$y(x) = \frac{1}{-x + x_0 + \frac{1}{y_0}}, \quad x \in \left(-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}\right)$$

(o leitor deve esboçar o gráfico desta solução). É interessante observar que nada na aparência equação $y' = y^2$ anuncia que suas soluções explodem em tempo finito. Chegamos a esta conclusão fazendo os cálculos. Vimos que, se o valor inicial da solução for $y_0 > 0$, depois de o valor de x aumentar $\frac{1}{y_0}$ a solução deixa de existir. A leitora deve agora fazer a discussão correspondente ao caso em que $y_0 < 0$.

Foi conveniente invocar a unicidade do Teorema 6 para concluir que as soluções de $y' = y^2$ que assumem um valor não-nulo é não-nula em todos os pontos do domínio mas, a rigor, era desnecessário invocar um teorema tão poderoso. Poderíamos ter usado argumentos mais elementares, de maneira análoga a como fizemos na Aula de 1 de março para a equação $x' = (a - bx)x$ (ali a variável independente era t).

5. AULA DE 12 DE MARÇO

Exemplo 8. Para qualquer $(x, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial

$$(33) \quad \begin{cases} y' &= x|y| \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases},$$

tem solução única. A maneira mais conveniente de justificar esta afirmação é invocando o Teorema 6. Para tanto, devemos mostrar que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x|y|$, que claramente é contínua, é também lipschitziana na segunda variável. De fato, dados (x, y_1) e (x, y_2) em \mathbb{R}^2 , temos

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |(x|y_2| - x|y_1|)| = |x|(|y_2| - |y_1|)| \leq |x||y_2 - y_1|.$$

Dado qualquer retângulo fechado Q contido em \mathbb{R}^2 , existe uma constante $C > 0$ tal que $|x| \leq C$ para todo $(x, y) \in Q$. Logo, para todos (x, y_1) e (x, y_2) em Q , temos $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C|y_2 - y_1|$, o que mostra que f é localmente lipschitziana na segunda variável.

Este problema de valor inicial pode ser resolvido explicitamente. Em primeiro lugar, é evidente que a função identicamente nula, $y(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, resolve (33) quando $y_0 = 0$. Logo, a única solução de (33) quando $y_0 = 0$ é a função sempre nula.

Seja $y(x)$ a solução de (33) para algum (x_0, y_0) com $y_0 > 0$, definida em um intervalo aberto I . Então $y(x) > 0$ para todo $x \in I$, caso contrário, existiria $x_1 \in I$ tal que $y(x_1) = 0$; daí $y(x)$ seria uma solução do problema de valor inicial

$$(34) \quad \begin{cases} y' &= x|y| \\ y(x_1) &= 0 \end{cases},$$

diferente da função identicamente nula, o que contrariaria a unicidade da solução de (34). Logo, a solução de (33) no caso em que $y_0 > 0$ satisfaz $y(x) > 0$ para todo x do domínio de $y(x)$, que chamaremos de I . Logo temos $|y(x)| = y(x)$ para todo $x \in I$, logo a equação $y' = x|y|$ é equivalente a, para todo $x \in I$,

$$y'(x) = xy(x) \iff \frac{y'(x)}{y(x)} = x \iff (\log y(x))' = x \iff \log y(x) = \frac{x^2}{2} + C \iff y(x) = e^C e^{\frac{x^2}{2}},$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Substituindo a condição inicial $y(x_0) = y_0$, vem $y_0 = e^C e^{\frac{x_0^2}{2}}$, logo

$$y(x) = y_0 e^{\frac{x^2 - x_0^2}{2}}$$

O domínio máximo de definição desta solução é a reta inteira, \mathbb{R} .

Seja $y(x)$ a solução de (33) para algum (x_0, y_0) com $y_0 < 0$, definida em um intervalo aberto I . O mesmo argumento que usamos no caso em que y_0 era positivo demonstra que $y(x) < 0$ para todo $x \in I$, logo $y = -|y|$, logo, usando uma notação mais resumida e mais sugestiva do que a que usamos no caso $y_0 > 0$, temos

$$y' = x|y| \iff \frac{dy}{dx} = -xy \iff \int \frac{dy}{y} = - \int x dx \iff \log |y| = -\frac{x^2}{2} + C \iff |y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Substituindo a condição inicial e lembrando que, como, $y(x) < 0$ para todo x , e portanto $y(x) = -|y(x)|$ para todo x , temos que $|y(x_0)| = -y(x_0) = -y_0$, vem $-y_0 = e^C e^{-\frac{x_0^2}{2}}$, logo

$$-|y(x)| = y_0 e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2}}, \quad \text{logo} \quad y(x) = y_0 e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

5.1. Curva da Perseguição. No instante $t = 0$, um gato se encontra no ponto de coordenadas $(a, 0)$ e um rato no ponto $(0, 0)$ e começa a perseguição. O rato foge com velocidade constante ν ao longo do eixo dos y , no sentido das ordenadas crescentes. A velocidade escalar do gato também é constante, igual a μ e aponta sempre na direção do rato. A trajetória do gato é sobre o gráfico de uma função $y(x)$. O problema é encontrar a função $y(x)$ e prever se o gato vai conseguir pegar o rato.

A Figura 3 (<https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura3.jpg>) ilustra a situação. Os pontos G e R vermelhos indicam os locais do gato e do rato no instante $t = 0$, os pontos G e R azuis indicam os locais depois de decorrido um tempo t . As coordenadas do R azul são $(0, \nu t)$, pois νt é a distância percorrida pelo gato, que vai em movimento retilíneo com velocidade constante ν . A distância percorrida pelo gato é o comprimento do gráfico da função $y(x)$ entre as abscissas x e a , e isto é igual à velocidade escalar constante do gato ω multiplicada por t :

$$(35) \quad \omega t = \int_x^a \sqrt{1 + y'(s)^2} ds.$$

. Os pontos $(0, y)$, $(0, \nu t)$ e (x, y) formam um triângulo retângulo, com ângulo reto em $(0, y)$. A tangente do ângulo em (x, y) é o valor absoluto da inclinação da reta tangente ao gráfico de $y(x)$, $-y'(x)$, pois a função $y(x)$

é decrescente. Logo, a distância entre o ponto $(0, y)$ e o ponto $(0, vt)$ é igual a $-xy'(x)$. Segue que

$$(36) \quad vt = y(x) - xy'(x).$$

Comparando as equações (35) e (36) e eliminando o t , vem

$$-xy'(x) + y(x) = k \int_x^a \sqrt{1 + y'(s)^2} ds,$$

em que denotamos por k a constante positiva igual ao quociente $\frac{\nu}{\mu}$. Derivando em relação a t , e multiplicando por (-1) , vem:

$$xy''(x) = k\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

6. AULA DE 15 DE MARÇO

No instante inicial, o gato está no ponto $(a, 0)$ e sua velocidade é horizontal, pois aponta para o gato, que está na origem. Daí segue que $y(a) = y'(a) = 0$. A função $y(x)$ que procuramos determinar é portanto a solução do problema de valor inicial

$$(37) \quad \begin{cases} xy'' &= k\sqrt{1 + y'^2} \\ y(a) &= 0 \\ y'(a) &= 0 \end{cases}.$$

A equação diferencial em (37) é de segunda ordem em y , mas y não comparece na fórmula. Ela é portanto uma equação diferencial de primeira ordem em $p = y'$,

$$x \frac{dp}{dx} = k\sqrt{1 + p^2},$$

cujas soluções satisfaz

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = k \int \frac{dx}{x},$$

ou seja, ³

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = k \log x + C \iff p + \sqrt{1 + p^2} = e^C x^k.$$

Para determinar o valor de C , usamos a condição inicial $p(a) = y'(a) = 0$. Substituindo $x = a$ e $p = 0$ em $p + \sqrt{1 + p^2} = e^C x^k$, vem $e^C a^k = 1$ e portanto

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^k.$$

Resolvendo p como função de x , vem ⁴

$$(38) \quad p(x) = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{2k} - 1}{2\left(\frac{x}{a}\right)^k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^k - \left(\frac{a}{x}\right)^k \right], \quad x > 0.$$

A função $y(x)$ é a única primitiva de $p(x)$ que satisfaz $p(a) = 0$. Daí,

$$(39) \quad y(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} \left[\frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} + \frac{1}{k-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{k-1} \right] - \frac{ak}{k^2-1}, & \text{se } k \neq 1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2a} - a \log x \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - a \log a \right), & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

Vamos agora analisar o comportamento da solução. Queremos saber se o gato pega o rato e, se sim, depois de quanto tempo. Para isso, retornemos à dedução da equação. No momento em que o gato estiver num ponto $(x, y(x))$, o rato estará no ponto $(0, y(x) - xy'(x))$ (veja de novo a Figura 3). Daí, se $d(x)$ denotar a distância

³Para resolver a integral indefinida $\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$, fazemos a substituição trigonométrica $p = \tan \theta$, $dp = \sec^2 \theta d\theta$, $\sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sec \theta$, logo $\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \sec \theta d\theta = \log(\sec \theta + \tan \theta) + C = \log(p + \sqrt{1 + p^2}) + C$.

⁴A função $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(p) = p + \sqrt{1 + p^2}$, tende a zero quando $p \rightarrow -\infty$, tende a infinito quando $p \rightarrow +\infty$ e é sempre crescente, pois $f'(p) > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$. Logo, f é uma bijeção, ou seja, para todo $u > 0$, existe um único $p \in \mathbb{R}$ tal que $p + \sqrt{1 + p^2} = u$. Este p pode ser determinado por meio de uma manipulação algébrica simples: $p + \sqrt{1 + p^2} = u \Rightarrow \sqrt{1 + p^2} = u - p \Rightarrow 1 + p^2 = u^2 - 2up + p^2 \Rightarrow 2up = u^2 - 1 \Rightarrow p = \frac{u^2 - 1}{2u}$.

entre o gato e o rato no instante em que o gato está em um ponto de abscissa igual a x , então, usando $p = y'$ e (38),

$$d(x)^2 = x^2[1 + p(x)]^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^k - \left(\frac{a}{x}\right)^k \right]^2$$

No caso em que a velocidade do gato é menor do que a do rato, $k < 1$, as funções $y(x)$, $p(x)$ e $d(x)$, a princípio definidas apenas para $0 < x < a$, possuem extensões contínuas para $x = 0$. A distância entre o gato e o rato se anula quando $x = 0$. Ou seja, o gato pega o rato no instante em que a abscissa do gato é 0 e o gato e o rato estão no ponto de coordenadas $(0, y(0)) = (0, \frac{ak}{1-k^2})$. Já vimos que, no instante t , o gato está sobre o ponto $(0, \nu t)$. Logo a captura do rato ocorre no instante t tal que $\nu t = \frac{ak}{1-k^2}$, ou seja, lembrando que $k = \frac{\nu}{\omega}$,

$$t = \frac{1}{\nu} \frac{ak}{1-k^2} = \frac{a\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

No caso em que $k = 1$, vemos de (39) que $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = +\infty$ (pois $\log x$ tende a $-\infty$), o que quer dizer que o gato nunca atinge o eixo dos y . Mas ainda não podemos dizer que nesse caso o rato escapa pois, quando $k = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} d(x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 + \frac{x^2}{4} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x} \right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 + \frac{(x^2 - a^2)^2}{4a^2} \right] = \frac{a^2}{4},$$

ou seja, $d(x)$ tende a $\frac{a}{2}$ quando x tende a zero. O rato não escapa, mas também não é pego pelo gato, pelo menos enquanto os dois forem capazes de manter constantes suas velocidades.

No caso em que o rato pode correr na direção da reta determinada por ele e pelo gato, se $k = 1$ (ou seja, $\nu = \mu$), a distância entre o gato e o rato permanece constante, igual a a . Neste caso que estamos discutindo, em que a fuga do rato está limitada por uma parede (o eixo dos y) e o gato está inicialmente na reta perpendicular à parede passando pelo rato, a distância entre o gato e o rato decresce (em relação ao tempo) a partir do valor a , tendendo a $\frac{a}{2}$ quando x tende a zero (que corresponde ao tempo tender a infinito).⁵

No caso em que o rato é mais veloz do que o gato ($k > 1$), tanto $y(x)$ quanto $d(x)$ tendem a infinito quando x tende a zero. Ou seja, o rato escapa.

6.1. Espelho Parabólico. É bem sabido que antenas parabólicas (superfícies de revolução cujas seções axiais são parábolas) refletem ondas eletromagnéticas paralelas a seu eixo de simetria em direção a um único ponto, onde fica localizado o receptor; e que um farol de automóvel tem um espelho parabólico que projeta todos os raios de luz emitidos a partir de seu foco paralelamente ao seu eixo de simetria. Nesta subseção, nós vamos provar que quaisquer curvas com essa propriedade são parábolas.

Suponha uma função $y(x)$ tem a seguinte propriedade: todo raio originado da origem do sistema cartesiano é refletido pelo gráfico de $y(x)$ paralelamente ao eixo dos x . Vamos deduzir a equação diferencial que é satisfeita por $y(x)$ fazendo considerações geométricas e trigonométricas em torno de um ponto do gráfico $(x, y(x))$ localizado no primeiro quadrante. Vamos supor também que a função $y(x)$ tem derivada positiva em x . A leitora mais curiosa deve tentar se convencer, ao final da dedução, que se obtém a mesma equação nos outros casos.

A partir de agora, vamos denotar os valores das funções y e y' em x simplesmente por y e y' .

Podemos reformular a propriedade refletora em questão afirmando que, para todo x , a reta normal no ponto (x, y) do gráfico faz ângulos iguais, cuja medida denotaremos por α , com a reta horizontal r passando por (x, y) e com a reta s que passa pela origem e por (x, y) (para melhor acompanhar a discussão seguinte, o leitor deve analisar a Figura 4, disponível em <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura4.pdf>). Seja β o ângulo que a tangente ao gráfico nesse ponto faz com a horizontal. Por definição de reta normal, temos $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, logo

$$(40) \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{y'}.$$

A reta r é transversal a duas retas paralelas: a reta s e o eixo dos x . Seja γ a medida do seguinte par de ângulos alternos internos: o ângulo formado por r e s à esquerda de r e abaixo de s (que é suplementar ao ângulo

⁵No caso em que $k = 1$, o quadrado da distância do gato ao rato, em função de x , é dada pelo polinômio $x^2 + \frac{1}{4a^2}(x^2 - a^2)^2$, que tem derivada positiva para $x > 0$. Como x decresce com o tempo, segue que a distância também decresce com o tempo.

formado pelos raios incidente e refletido, que mede 2α , logo $\tan(2\alpha) = -\tan \gamma$ e o ângulo formado por r e pelo eixo dos x no primeiro quadrante e à direita de r . Considerando o triângulo retângulo de vértices $(0,0)$, $(0,x)$ e (x,y) , vemos que $\tan \gamma = \frac{y}{x}$. Logo temos

$$(41) \quad \tan(2\alpha) = -\tan \gamma = \frac{y}{x}.$$

Podemos agora substituir (40) e (41) na fórmula da tangente do dobro, $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, obtendo

$$-\frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{y'}}{1 - \frac{1}{(y')^2}},$$

que é equivalente a

$$(42) \quad y(y')^2 + 2xy' - y = 0.$$

7. AULA DE 19 DE MARÇO

Podemos obter y' como função de y e de x resolvendo a equação de segundo grau em y' (42):

$$y' = \frac{-2x + \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{-2x - \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y},$$

donde segue

$$(43) \quad yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad yy' + x = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vamos resolver primeiramente a equação em (43) que tem o sinal positivo no segundo membro. A mudança de variável dependente $z = x^2 + y^2$ é sugerida pelo fato de que $yy' + x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)'$. Daí $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ torna-se equivalente a $z' = 2\sqrt{z}$, que é uma *equação separável* (discutidas em mais detalhes a seguir). Temos:

$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z} \iff \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx \iff \sqrt{z} = x + C \iff \sqrt{x^2 + y^2} = x + C,$$

C constante. Mostramos que $y(x)$ é solução de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ se e somente se existe C constante tal que

$$(44) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

Precisamos agora encontrar as funções $y(x)$ que satisfazem (44) para algum $C \in \mathbb{R}$. Como a raiz é sempre não negativa, segue que $x + C \geq 0$ para todo x no domínio de $y(x)$. Segue de $x + C \geq 0$ que

$$(45) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + C \iff x^2 + y^2 = x^2 + 2Cx + C^2 \iff y^2 = 2Cx + C^2$$

No caso em que $C > 0$, para que as afirmações em (45) sejam satisfeitas para x , devemos ter, além de $x + C \geq 0$, $2Cx + C^2 \geq 0$, que é equivalente a $x \geq -\frac{C}{2}$ (que por sua vez implica que $x \geq -C$, ou seja $x + C \geq 0$). Daí, $y_C^+(x) = \sqrt{2Cx + C^2}$ e $y_C^-(x) = -\sqrt{2Cx + C^2}$ são soluções de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ definidas no intervalo $I_C = (-\frac{C}{2}, +\infty)$ (em $x = -\frac{C}{2}$, estas duas funções estão definidas e são contínuas, mas não são deriváveis). Os gráficos de y_C^+ e y_C^- são dois pedaços da parábola de vértice $(-\frac{C}{2}, 0)$ e foco em $(0, 0)$.⁶

Quando $C < 0$, as afirmações em (45) também são verdadeiras, mas são vaziamente verdadeiras, pois nenhum valor de x pode satisfazê-las. De fato, a última das igualdades em (45) implica que $2Cx + C^2 \geq 0$, o que implica que (pois $C < 0$) $x \leq -\frac{C}{2} < -C$, o que é incompatível com $x \geq -C$, que decorre da primeira igualdade. Ou seja, a equação $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$ não define uma solução de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ quando $C < 0$.

Quando $C = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$ torna-se $\sqrt{x^2 + y^2} = x$, que é equivalente a $y = 0$ e $x \leq 0$. Obtemos assim a solução singular $y(x) = 0$, $x \geq 0$, de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$, que poderia ter sido descoberta por inspeção antes mesmo de começarmos esta análise. Essa solução não resolve o problema de matemática aplicada proposto inicialmente, o de encontrar o formato de espelhos com uma certa propriedade de reflexão.

⁶Dado $C \neq 0$, a parábola com foco em $(0,0)$ e vértice em $(-\frac{C}{2}, 0)$ é, por definição, o conjunto dos pontos (x,y) equidistantes do ponto $(0,0)$ e da reta $y = -C$. Ou seja, é o conjunto dos pontos (x,y) que satisfazem a equação $\sqrt{x^2 + y^2} = |x + C|$, que é equivalente a $x^2 + y^2 = (x + C)^2$, que é equivalente a $y^2 = 2Cx + C^2$.

Em resumo, mostramos que todas as soluções de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ que não se anulam têm gráficos contidos nas parábolas $y^2 = 2Cx + C^2$, $C > 0$.

Com pequenas alterações, e muito cuidado com os sinais, este mesmo argumento mostra que todas as soluções não nulas da equação $yy' + x = -\sqrt{x^2 + y^2}$ têm gráficos contidos nas parábolas $y^2 = 2Cx + C^2$, $C < 0$.

Podemos aproveitar este exemplo para refletir um pouco mais sobre o Teorema 6. As equações $yy' + x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ colocadas no formato do enunciado do Teorema 6 ficam

$$y' = f^\pm(x, y), \quad \text{com} \quad f^\pm(x, y) = -\frac{x}{y} \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

As funções f^\pm são infinitamente diferenciáveis nos abertos $\Omega_1 = \{(x, y); y > 0\}$ e $\Omega_2 = \{(x, y); y < 0\}$. O Teorema 6 prevê, portanto, que os problemas de valor inicial associados a $y' = f^\pm(x, y)$ com dado inicial (x_0, y_0) em Ω_1 ou Ω_2 (ou seja, com $y_0 \neq 0$) têm solução única definida em um intervalo aberto maximal.

Problema 1. Mostre que, para quaisquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \neq 0$, cada um dos problemas de valor inicial

$$(46) \quad \begin{cases} yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} yy' + x = -\sqrt{x^2 + y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única. Determine o intervalo maximal de definição de cada solução.

7.1. Equações Separáveis. Uma equação separável é uma equação diferencial ordinária da forma

$$(47) \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

dadas f e g funções contínuas, e supondo que g não se anula.

Proposição 9. *Sejam f e g funções contínuas definidas em intervalos, $g(y) \neq 0$ para todo y , sejam F e G primitivas de f e g , respectivamente (isto é, $F' = f$ e $G' = g$). Uma função derivável $y(x)$ definida em um intervalo I é solução de (47) se e somente se a equação*

$$(48) \quad G(y(x)) = F(x) + C$$

é satisfeita para todo $x \in I$, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Usando a regra da cadeia e as hipóteses, dada $y(x)$ uma função derivável, temos

$$\frac{d}{dx}[G(y(x)) - F(x)] = G'(y(x))y'(x) - F'(x) = g(y(x))y'(x) - f(x), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Logo, $G(y(x)) - F(x)$ é constante se e somente se $g(y(x))y'(x) - f(x) = 0$ para todo $x \in I$, o que é equivalente a $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$ para todo $x \in I$, que é o que significa $y(x)$ ser solução de (47). \square

O enunciado da Proposição 9 pode ser reformulado na afirmação: a solução geral de (47) é dada implicitamente por

$$(49) \quad G(y) = F(x) + C,$$

C constante arbitrária, o que classicamente se denota por

$$(50) \quad \int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

A fórmula (50) é muito sugestiva e fácil de manipular, mas deve ser lida com cautela. O y no primeiro membro tem um duplo significado. Por um lado ele é a variável independente da integral indefinida $\int g(y) dy$, por outro lado, ele denota a função $y(x)$. Falando de um jeito informal, a gente só “substitui” (mentalmente) y por $y(x)$ depois de resolvida a integral indefinida. E deve ficar claro que há uma “constante arbitrária” somada a um dos lados de (50) (ou a ambos, tanto faz, pois a soma ou subtração de duas constantes arbitrária é uma constante arbitrária).

Tudo que o que provamos foi que, se (47) tiver solução, ela é dada implicitamente por (49), que é o mesmo que (50). A questão da existência de soluções deve ser abordada no contexto de problemas de valor inicial, e com a ajuda do Teorema da Função Implícita, que enunciamos a seguir sem demonstração.

Teorema 10. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, e $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que a derivada parcial $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0)$ é diferente de 0. Então existem intervalos abertos I e J , contendo x_0 e y_0 , respectivamente, tais que $I \times J \subseteq \Omega$ e tais que,*

$$(51) \quad \text{para todo } x \in I \text{ existe um único } y(x) \in J \text{ tal que } H(x, y(x)) = H(x_0, y_0).$$

Além disso, a função $x \mapsto y(x)$ definida pela propriedade (51) é continuamente derivável.

Daí decorre o teorema de existência e unicidade para equações separáveis.

Teorema 11. *Sejam f e g funções contínuas definida nos intervalos abertos \tilde{I} e \tilde{J} , respectivamente, e suponha que $g(y) \neq 0$ para todo $y \in \tilde{J}$. Dado $(x_0, y_0) \in \tilde{I} \times \tilde{J}$, o problema de valor inicial*

$$(52) \quad \begin{cases} y' &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

tem solução única definida num intervalo $I \subseteq \tilde{I}$.

Demonstração: Sejam F e G tais que $F' = f$ e $G' = g$ e considere $H(x, y) = G(y) - F(x)$. Então H é continuamente diferenciável no aberto $\tilde{I} \times \tilde{J}$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$. Podemos então aplicar o Teorema 10. Seja $y(x)$ a função continuamente derivável definida em um intervalo I' contido em I e que satisfaz (51). Então $y(x_0) = y_0$ e

$$G(x, y(x)) - F(x) = G(y_0) - F(x_0).$$

para todo $x \in I'$. Segue da Proposição 9 que $y(x)$ é solução da equação diferencial $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$. \square

8. AULA DE 22 DE MARÇO

Dois exemplos de equações separáveis que já estudamos são $y' = y^2$ (neste caso $g(y) = y^2$ e $f(x) = 1$ para todo x) e $y' = x|y|$ ($g(y) = |y|$ e $f(x) = x$). Nos dois casos resolvemos o problema de valor inicial para quaisquer condições iniciais (vejam (31) e (33)).

Vamos agora considerar a equação diferencial $y' = y^{2/3}$, que é uma equação separável com $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(y) = y^{2/3}$, $y \in \mathbb{R}$. O método geral descrito no final da aula passada pede que $g(y)$ nunca anule. Aplicando aquele método, encontramos as soluções de $y' = y^{2/3}$ que nunca se anulam:

$$(53) \quad y' = y^{2/3} \iff \frac{dy}{dx} = y^{2/3} \iff \int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dx \iff 3y^{1/3} = x + C \iff y = \frac{(x + C)^3}{27}$$

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, apenas uma das infinitas soluções de $y' = y^{2/3}$ encontradas em (53) satisfaz a condição $y(x_0) = y_0$, a saber, aquela cuja constante C satisfaz

$$y_0 = \frac{(x_0 + C)^3}{27}, \text{ ou seja, } C = 3y_0^{1/3} - x_0.$$

Mas isto não quer dizer que a única solução do problema de valor inicial

$$(54) \quad \begin{cases} y' &= y^{2/3} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

seja dada por

$$y(x) = \frac{(x - x_0 + 3y_0^{1/3})^3}{27};$$

isto porque as soluções de $y' = y^{\frac{2}{3}}$ que não se anulam podem ser, digamos assim, “emendadas” com a solução $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, dados reais $a < b$, a função $y_{a,b}$ definida por

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-a)^3, & \text{se } x < a, \\ 0, & \text{se } a \leq b, \\ \frac{1}{27}(x-b)^3, & \text{se } x > b, \end{cases}$$

é solução de $y' = y^{2/3}$, pois a equação é satisfeita nos intervalos abertos $(-\infty, a)$, (a, b) e $(b, +\infty)$, e nos pontos de transição a e b os limites laterais à direita e à esquerda de $y_{a,b}$ e de $y'_{a,b}$ coincidem. Daí, por exemplo, se $y_0 > 0$, tomando $b = x_0 - 3y_0^{1/3}$ e pegando qualquer $a < b$, $y_{a,b}$ é solução do problema de valor inicial (54), que tem portanto infinitas soluções definidas em \mathbb{R} (embora todas elas coincidam no intervalo $(b, +\infty)$). Outro exemplo: dados quaisquer a e b satisfazendo $a < 0 < b$, $y_{a,b}$ é solução de (54) quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (veja a Figura 5, disponível em <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura5.pdf>). A não-unicidade da solução do problema de valor inicial (54) quando $y_0 = 0$ é pior do que quando $y_0 \neq 0$, pois, quando $y_0 = 0$, em qualquer intervalo aberto contendo x_0 , (54) tem infinitas soluções, enquanto que quando $y_0 \neq 0$ a não-unicidade só se manifesta longe de x_0 .

8.1. Famílias de curvas ortogonais. A função $f(x, y)$ em uma equação diferencial $y' = f(x, y)$ pode ser interpretada como um “campo de inclinações”. Em um ponto (x_0, y_0) , $f(x_0, y_0)$ dá a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução de $y' = f(x, y)$ que passa (o gráfico) pelo ponto (x_0, y_0) . Isso pode ser visualizado com a ajuda do “slope field plotter” do Geogebra.⁷ Se valer $f(x, y)g(x, y) = -1$ para todo (x, y) , a inclinação das retas tangentes aos gráficos das soluções de $y' = f(x, y)$ e de $y' = g(x, y)$ que passam por qualquer ponto (x_0, y_0) serão perpendiculares; ou seja, os gráficos das soluções das duas equações diferenciais serão famílias de curvas que se interceptam ortogonalmente.

Vamos verificar este fenômeno para as equações diferenciais $y' = -x/y$ e $y' = y/x$. As soluções gerais dessas duas equações podem ser encontradas usando o método das equações separáveis:

$$y' = -\frac{x}{y} \iff \int y \, dy = - \int x \, dx \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \iff x^2 + y^2 = 2C.$$

Fazendo $2C = r^2$, vemos que a solução geral de $y' = -x/y$ é dada implicitamente por $x^2 + y^2 = r^2$, ou seja, seus gráficos estão contidos nos círculos de raio r centrados na origem, $r > 0$.

$$y' = \frac{y}{x} \iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \iff \log |y| = \log |x| + C \iff |y| = e^C |x|$$

Fazendo $e^C = m$, vemos que a solução geral de $y' = x/y$ é dada implicitamente por $|y| = m|x|$, ou seja, seus gráficos são semirretas originadas na origem.

As semirretas originadas na origem e os círculos centrados na origem são famílias de curvas ortogonais, como tinha de ser, pois $-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1$ para todo (x, y) .

Essas ideias e esses métodos podem ser usados também para, dada uma família de curvas, encontrar uma outra família de curvas ortogonais à primeira. Consideremos por exemplo a família de curvas $x^2 - y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$. Quando $C = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ é o par de retas bissetrizes dos quadrantes, $y = x$ ou $y = -x$. Quando $C \neq 0$, $x^2 - y^2 = C$ é uma hipérbole com retas assíntotas $y = x$ e $y = -x$; quando $C > 0$, a hipérbole intercepta o eixo dos x , quando $C < 0$, o eixo dos y . Podemos encontrar uma equação diferencial cujas soluções têm como gráfico essa família de hipérbolas derivando implicitamente y em relação a x :

$$x^2 - y^2 = C \iff 2x - 2yy' = 0 \iff y' = \frac{x}{y}.$$

Logo, os gráficos das soluções de $y' = -y/x$ serão ortogonais às hipérbolas $x^2 - y^2 = C$. Temos

$$y' = -\frac{y}{x} \iff \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \iff \log |y| = -\log |x| + C \iff \log |xy| = C \iff |xy| = e^C$$

⁷Veja a Figura 6, disponível em <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2024/Figura6.pdf>.

Fazendo $e^C = D$, vemos que a solução geral de $y' = -y/x$ é dada implicitamente por $|xy| = D$, ou seja, seus gráficos são ramos das hipérbolas de equação $xy = D$.

Pode ser verificado diretamente, sem falar de equações diferenciais, que as hipérbolas $x^2 - y^2 = C$ e $xy = D$ se interceptam ortogonalmente, mas sabemos de antemão que esse é o caso, pois são os gráficos das soluções de $y' = x/y$ e de $y' = -y/x$, respectivamente, e $\frac{x}{y} \cdot (-\frac{y}{x}) = -1$ para todo (x, y) .

Problema 2. Encontre uma família de curvas ortogonais às elipses $\frac{x^2}{2} + y^2 = a$, $a > 0$.

9. MAIS PROBLEMAS

Problema 3. Verifique que as funções $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \sin(\ln x)$, definidas para $x > 0$, são soluções da equação $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

Problema 4. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$ é solução do problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

Problema 5. Ache todas as soluções, dando seus domínios máximos, das equações:

(a) $y''' = x^2$, (b) $3y' + y = 2e^{-x}$, (c) $(x + 3y) - xy' = 0$, (d) $xy' = y$.

Problema 6. (a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$.

(b) Esboce o gráfico de algumas soluções encontradas no item (a).

(c) Para que valores de y_0 o problema de valor inicial $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tem solução?

5 - (a) Mostre que o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções.

(b) Mostre que o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções definidas em \mathbb{R} .

(c) Mostre que duas soluções quaisquer do problema de valor inicial do item (b) coincidem em algum intervalo aberto contendo 0.

Problema 7. (a) Mostre que toda solução de $x^2 y' + 2xy = 1$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

Problema 8. (a) Mostre que toda solução de $x^2 y' + 2xy = 0$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

Problema 9. Uma equação de Bernoulli é uma equação da forma $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e f e g são funções contínuas definidas num intervalo aberto.

(a) Mostre que a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear.

(b) Resolva:

(1) $y' + y = xy^3$

(2) $y' + \frac{y}{x} = y^{1/2}$

(3) $y' = ay^{2/3} - by$

Problema 10. (a) Encontre as soluções constantes de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 4)$.

(b) Mostre que, se I é intervalo aberto, $0 \in I$, e se $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de $\begin{cases} y' = (y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, então $|y(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Dica: Use unicidade.

Problema 11. (a) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto tal que $(x, y) \in U \implies (\lambda x, \lambda y) \in U$ para todo $\lambda \neq 0$ e seja $f \in C(U)$. Suponha que f satisfaz $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, para todo $\lambda \neq 0$ e para todo $(x, y) \in U$. Mostre que a mudança de variável dependente $v = y/x$ transforma a equação $y' = f(x, y)$ em uma equação de variáveis separáveis.

(b) Determine implicitamente a solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}, \quad y(1) = e,$$

e calcule $y'(1)$, $y''(1)$ e $y'''(1)$.

(c) Fazendo mudanças de variável dependente e de variável independente da forma $z = y + \alpha$ e $x = t + \beta$ e, em seguida, usando a técnica do item (a), resolva o problema de valor inicial

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1}, \quad y(0) = 1.$$

Problema 12. (a) Mostre que a diferença $z = y_2 - y_1$ de duas soluções da equação diferencial

$$(55) \quad y' + x^3 y - x^2 y^2 = 1$$

satisfaz

$$(56) \quad z' + [x^3 - 2x^2 y_1(x)]z = x^2 z^2.$$

(b) Notando que $y_1(x) = x$ é uma das soluções de (55), use a técnica do Problema 9 para resolver (56) e obtenha a solução geral de (55).

Observação: A técnica do Problema 12 permite resolver, mais geralmente, equações da forma $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$, denominadas *equações de Riccati*.

10. AULA DE 2 DE ABRIL

Na aula de 22 de março, usamos o método das equações separáveis para concluir que a solução geral da equação diferencial $y' = -\frac{x}{y}$ é dada implicitamente por $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$. Isto quer dizer que, se uma função $y(x)$, definida em um intervalo, é solução de $y' = -\frac{x}{y}$ se e somente se seu gráfico estiver contido em alguma curva de equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$, para algum $r > 0$. Na vizinhança de um ponto da forma $(\pm r, 0)$, entretanto, é impossível tirar y como função de x na curva $x^2 + y^2 = r^2$, mas é possível tirar x como função de y , $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$, e esta função satisfaz a equação diferencial $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ (o leitor pode verificar de maneira independente esta afirmação, que tem de ser verdadeira, pois envolve apenas uma troca no nome das variáveis em um outra afirmação que já sabemos ser verdadeira).

Vamos agora introduzir uma nova notação que permite resumir as afirmações do parágrafo anterior. Diremos simplesmente que a solução geral da equação diferencial $x dx + y dy = 0$ é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

Mais geralmente, dadas M e N funções contínuas definidas em um aberto de \mathbb{R}^2 , diremos que $F(x, y) = C$, C constante, descreve uma solução da equação diferencial

$$(57) \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

se

- (1) O gradiente de F , ∇F , nunca se anula nos pontos da curva $F(x, y) = C$, o que implica, pelo teorema da função implícita que, perto de qualquer ponto da curva, ou existe uma função derivável $y(x)$ tal que $F(x, y(x)) = C$ para todo x , ou existe uma função derivável $x(y)$ tal que $F(x(y), y) = C$ para todo y .

- (2) No caso de existir uma função $y(x)$ como descrita no item 1, ela satisfaz $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$.
- (3) No caso de existir uma função $x(y)$ como descrita no item 1, ela satisfaz $\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$.

10.1. Equações Exatas.

Definição 12. Dadas funções contínuas $M(x, y)$ e $N(x, y)$ definidas em um aberto Ω de \mathbb{R}^2 , diremos que o campo vetorial $(M(x, y), N(x, y))$ é conservativo se existir $F(x, y)$ de classe C^1 em Ω tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Quando o campo (M, N) for conservativo, diremos também que a forma diferencial⁸ $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é exata. A função $F(x, y)$ é chamada de potencial do campo $(M(x, y), N(x, y))$.

Quando o campo $(M(x, y), N(x, y))$ é conservativo, nunca se anula, e um potencial $F(x, y)$ é conhecido, então as curvas de nível de F descrevem soluções da equação diferencial (57).

Proposição 13. Sejam M e N contínuas, definidas em um aberto Ω de \mathbb{R}^2 , tais que M e N nunca se anulam simultaneamente. Suponha, além disso, que F é tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Então as soluções de (57) são todas descritas por $F(x, y) = C$, C constante arbitrária.

No caso em que M e N possuem derivadas de primeira ordem contínuas, e se o campo (M, N) possui um potencial F , segue do Teorema de Schwarz (que afirmam que as derivadas mistas de segunda ordem são iguais se forem contínuas) que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Em outras palavras, a igualdade

$$(58) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

é uma condição necessária para que o campo (M, N) seja conservativo. Nem sempre (58) é suficiente para que o campo seja conservativo. Isso é verdade quando o domínio de M e N é “simplesmente conexo” (sem buracos); em particular quando M e N estão definidos em um retângulo.

11. AULA DE 5 DE ABRIL

Exemplo 14. A solução geral de $(2x + y^2) dx + 2xy dy = 0$ é $x^2 + xy^2 = C$, C constante.

Problema 13. Encontre o domínio maximal da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2x + y^2 + 2xyy' = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

11.1. Fator Integrante.

Problema 14. A equação $e^x \sec y - \tan y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{ax} \cos y$. Determine a e resolva a equação.

Problema 15. A equação $x(y^2 - 1)(\ln x)y' + y(y^2 + 1) = 0$ tem um fator integrante da forma $\mu(x, y) = x^m y^n$. Determine m e n e resolva a equação.

⁸Não definiremos formas diferenciais nestas notas, mas apenas o significado da frase “a forma tal é exata”.

12. SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Como observamos pouco antes do enunciado do Problema 1, é consequência do Teorema 6 que, para quaisquer (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$, cada um dos problemas de valor inicial em (46) tem solução única definida em um intervalo aberto maximal. O que este problema pede é que se determine esses intervalos.

Vimos também que as soluções de $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ que não se anulam têm gráficos contidos nas parábolas $y^2 = 2Cx + C^2$, $C > 0$. Daí, dado (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$, a solução do problema de valor inicial

$$(59) \quad \begin{cases} yy' + x &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

tem seu gráfico contido na parábola $y^2 = 2Cx + C^2$, com $C > 0$ satisfazendo $y_0^2 = 2Cx_0 + C^2$. Resolvendo a equação de segundo grau em C ,

$$(60) \quad C^2 + 2x_0C - y_0^2 = 0,$$

vem

$$C = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \text{ou} \quad C = -x_0 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Para todo (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$, temos:

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} > |x_0| \geq x_0, \quad \text{logo} \quad -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

e

$$-\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < -|x_0| \leq x_0, \quad \text{logo} \quad -x_0 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < 0.$$

Assim, a única solução positiva de (60) é $C = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e, portanto, a única solução de (59) é dada implicitamente por $y^2 = 2Cx + C^2$, com $C = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. A partir de $y^2 = 2Cx + C^2$, obtemos duas soluções, $y = \sqrt{2Cx + C^2}$ e $y = -\sqrt{2Cx + C^2}$. Para que a condição inicial $y(x_0) = y_0$ seja satisfeita, devemos tomar a solução com sinal positivo no caso em que $y_0 > 0$ e a solução com sinal negativo no caso em que $y_0 < 0$. As funções $y = \sqrt{2Cx + C^2}$ e $y = -\sqrt{2Cx + C^2}$ são deriváveis no conjunto dos x tais que $2Cx + C^2 > 0$, o que é equivalente (pois $C > 0$) a $2x + C > 0$, o que é equivalente a $x > -\frac{C}{2}$.

Ou seja, o domínio maximal da única solução de (59) é o intervalo aberto ilimitado $(-\frac{C}{2}, +\infty)$ com $C = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ (sendo C positivo).

Com argumentos quase idênticos, podemos mostrar que, dado (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$, o domínio maximal do problema de valor inicial

$$\begin{cases} yy' + x &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

é $(-\infty, -\frac{C}{2})$ com $C = -x_0 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ (sendo C negativo).

REFERÊNCIAS

- [1] DJAIRÓ GUEDES DE FIGUEIREDO E ALOÍSIO FREIRIA NEVES, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.
- [2] DONALD L. KREIDER, ROBERT G. KULLER E DONALD R. OSTBERG, Equações diferenciais. Editora da Universidade de São Paulo, 1972.
- [3] WILLIAM E. BOYCE E RICHARD C. DIPRIMA, Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno. LTC, 2006.
- [4] PHILIP HARTMAN, Ordinary Differential Equations, Second Edition. Birkhäuser, 1982.