NOTAS DE AULA

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2023, TURMA 42
IME - USP
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Sumário

Introdução

Esta é uma versão modificada e estendida das notas de aula que escrevi para a Turma 42 da disciplina MAT0230 (Geometria e Desenho Geométrico I), ministrada no segundo semestre de 2022 para alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. A versão original continua disponível em https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2022/Notas22.pdf .

Nosso objetivo é a compreensão dos fundamentos da geometria euclideana numa linguagem contemporânea. Estamos interessados primordialmente no método axiomático, que consiste em enunciar claramente quais são as premissas e, a partir delas, dar demonstrações completas de todos os resultados da teoria. As civilizações islâmica e ocidental herdaram esse método de Euclides, que consolidou no tratado Os Elementos [1] boa parte da Matemática conhecida na civilização helenística no quarto século antes de Cristo.

Euclides principia sua obra enunciando certas "noções comuns" (regras lógicas de dedução) e seus cinco "postulados". Os quatro primeiros postulados podem ser encarados como simples verdades autoevidentes. Já o quinto, embora pareça correto, não é tão natural. Durante dois milênios, estudiosos tentaram demonstrar que o quinto postulado era supérfluo, que podia ser demonstrado a partir das verdades autoevidentes contidas nos quatro primeiros postulados e nas noções comuns. Foram dadas muitas "demonstrações" falaciosas, que na verdade continham alguma passagem em que se usavam, sutilmente, sem que se percebesse, consequências do quinto postulado. No século 19, a construção de modelos de "geometria não-euclideana", em que todos os postulados, menos o quinto, eram satisfeitos, mostrou de uma vez por todas que Euclides estava certo: é preciso se supor verdadeiro o quinto postulado para que seja possível demonstrar os resultados clássicos da geometria, como por exemplo os teoremas de Tales e de Pitágoras, conhecidos desde muito antes de Euclides.

A revolucionária descoberta das geometrias não-euclideanas evidenciou a necessidade de fundamentar a geometria em uma linguagem mais rigorosa do que a de Euclides. Para compreender, por exemplo, qual foi o erro de Legendre ao acreditar que tinha demonstrado o quinto postulado, era necessário explicitar os axiomas que Euclides tinha assumido apenas implicitamente e escrever demonstrações que pudessem ser verificadas usando apenas argumentos formais, sem o auxílio de figuras. No final do século 19, Pasch enunciou os hoje chamados de "axiomas de ordenamento" que estabelecem as regras que podem ser usadas ao se lidar com a noção de um ponto estar entre dois outros pontos, e que têm como consequências a separação de uma reta por um ponto em duas partes disjuntas, e a separação de um plano por uma reta em dois semiplanos. Em seus "Fundamentos da Geometria" [4], baseando-se mais imediatamente no trabalho de Pasch, e coroando um esforço de dois milênios de investigações, Hilbert propôs um conjunto de axiomas que completou a geometria de Euclides. Essa é talvez a segunda mais importante referência da Geometria, após os Elementos, naturalmente.

Nos anos 1930, Birkhoff propôs uma grande simplificação na teoria axiomática de Euclides-Hilbert. Ele partiu do princípio de que são conhecidos os números reais e suas propriedades e assumiu o "axioma da régua", que estabelece uma bijeção entre uma reta e o conjunto dos números reais. Daí as noções de congruência e de estar entre deixam de ser noções primitivas e tornam-se definições. E os postulados de Hilbert de ordenamento e congruência se tornam proposições, que podem ser demonstradas usando as propriedades dos números reais. A abordagem de Birkhoff é chamada de "geometria métrica", a de Hilbert, de "geometria sintética". O estudo da geometria sintética permite apreciar melhor a epopeia que começou com Euclides e culminou com a descoberta das geometrias não-euclideanas, e pode servir de porta de entrada para tópicos matemáticos mais avançados, em Lógica e em Álgebra, por exemplo. A geometria métrica é a que se ensina na Escola Básica, é a que se aplica em problemas de Física ou Engenharia. Por isso é discutível qual abordagem é a mais adequada para uma disciplina voltada para alunos de Licenciatura. Se, por um lado, estudar a geometria métrica os prepara melhor no conteúdo específico que vão ensinar, a abordagem sintética os coloca em contato com temas históricos importantes, que demonstram a importância que a Matemática teve no desenvolvimento da civilização como um todo.

Embora muitas vezes eu vá direto às fontes, que são os livros de Euclides e de Hilbert, eu me baseei principalmente em quatro textos didáticos mais modernos, especialmente em [2], do qual tomei emprestadas a nomenclatura, a notação, e a ordem dos assuntos. Também fui muito influenciado por [6], que faz um interessante paralelo entre a abordagem métrica e a sintética da geometria. Consultei bastante [3], cuja exposição é mais profunda e mais completa do que as de [2, 6], além de servir como um guia excelente para se ler Euclides a partir de um ponto de vista moderno. De [5], extraí a construção de dois modelos: o plano de Descartes e o plano de Poincaré. Estas notas são escritas com mais detalhes do que esses seis livros citados. Minha intenção foi tornar o assunto mais acessível para leitores menos experientes. Espero não ter exagerado a ponto de ter tornado cansativa a leitura.

Na Seção 1, enunciamos os cinco Postulados de Euclides e descrevemos o argumento usado por Legendre em sua tentativa de demonstrar o Quinto Postulado. Na Seção 2 iniciamos o estudo dos axiomas de Hilbert abordando inicialmente os "axiomas de incidência". Como nestas notas vamos tratar apenas da geometria plana, os axiomas de incidência resumem-se a três. O primeiro corresponde ao primeiro postulado de Euclides (dois pontos determinam uma única reta). Os dois seguintes foram assumidos apenas implicitamente por Euclides: existem pelo menos dois pontos em uma dada reta e existem pelo menos três pontos não-colineares. Na Seção 3, discutimos diversos modelos de “geometrias” que satisfazem os axiomas de incidências mas que com certeza não descrevem a “geometria do mundo real”, que era aparentemente a intenção de Euclides.

1. Os Postulados de Euclides (para geometria plana)

O ponto de partida da geometria euclideana são os seguintes termos ou frases que aceitamos sem definição: (1) ponto, (2) reta, (3) congruência, (4) um ponto está em uma reta, (5) um ponto está entre dois pontos. Dizer que a reta r passa pelo ponto P é o mesmo que dizer que o ponto P está na reta r. Denotaremos congruência por $\cong$.

As noções de congruência, de “estar entre” e de “estar em” serão sujeitas a certos axiomas, oportunamente enunciados. Nos Elementos [1], os axiomas sobre a noção de estar entre e diversos axiomas sobre as noções de estar em e de congruência são assumidos apenas implicitamente. Alguns dos axiomas sobre congruência são incluídos por Euclides nas “noções comuns” que antecedem o enunciado da sua primeira proposição.

Postulado 1. *Dados* [1] *dois pontos P e Q, existe uma única reta que passa por P e Q. Essa reta é denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Claro que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 1.1. *Se o ponto C está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e é distinto de A e de B, então as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são iguais a $\overleftrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ passam por A e C. Pelo Postulado 1, existe uma única reta que passa por A e por C. Logo $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são a mesma reta. Trocando os pontos, o mesmo argumento garante que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são a mesma reta. $\square$

Na Seção 4, vamos enunciar todos os axiomas sobre o “estar entre”. Para enunciar os demais postulados de Euclides precisamos antecipar o seguinte axioma, que será posteriormente incluído no que chamaremos de “Axioma B1”.

Postulado X. Se o ponto B está entre A e C, então B está na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Definição 1.1. *Dados dois pontos A e B, o segmento de extremidades A e B, que denotaremos por AB, é o conjunto de pontos que consiste de: A, B e de todos os pontos que estão entre A e B.*

Segue do Postulado X que todos os pontos de AB estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A formulação original [1] do segundo postulado de Euclides é “fique postulado prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (reta limitada é como Euclides chamava um segmento). Seguindo Greenberg [2], adotaremos aqui a seguinte interpretação do que Euclides queria dizer:

Postulado 2. *Dado o segmento AB, para todo segmento CD existe um ponto E tal que B está entre A e E e BE é congruente a CD.*

Em outras palavras, todo segmento pode ser estendido indefinidamente, a partir de cada uma de suas extremidades.

Definição 1.2. *Dados dois pontos O e A, o círculo de centro O que passa por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$.*

---

[1] Sempre que nos referirmos a dois pontos, ou duas coisas quaisquer, ficará implícito que os dois pontos, ou as duas coisas, são distintos.

O enunciado original do terceiro postulado de Euclides é: "fique postulado, com todo centro e distância, descrever um círculo" [1]. Para os padrões modernos de rigor, seria necessário antes definir distância. Mas, para isso, precisaríamos antes definir os números reais. Em vez disso, adotamos a seguinte formulação de [2] do terceiro postulado.

Postulado 3. *Dados dois pontos O e A, existe o círculo de centro O e raio OA.*

O Postulado 3 é consequência imediata dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Numa abordagem moderna, portanto, ele se torna supérfluo diante da Definição 1.2.

Os Postulados 1 e 3 podem ser reinterpretados como postulados do desenho geométrico. Chama-se de *régua euclideana* um instrumento ideal que permite obter a reta determinada por dois pontos; e de *compasso euclideano* o instrumento ideal que permite obter o círculo com centro em um ponto que passa por um segundo ponto dado. O Postulado 1 nos diz que é possível traçar, usando uma régua, a única reta que passa passa por dois pontos dados. O Postulado 3 nos diz que, dados dois pontos, usando um compasso, é possível traçar o círculo com centro em um dos pontos e passando pelo outro.

Definição 1.3. *Dados dois pontos A e B, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P. Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A.*

Só depois de enunciarmos os postulados da noção "estar entre" seremos capazes de provar a seguinte proposição: "se C é distinto de A e pertence a $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$".

Definição 1.4. *As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais.*

Definição 1.5. *Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas não opostas que se originam em A. As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.6. *Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.*

Definição 1.7. *Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

É importante frisar que os dois ângulos retos do enunciado do Postulado 4 não são necessariamente suplementares. Um deles pode estar aqui do nosso lado e o outro em outra galáxia. Num certo sentido, este postulado reflete a homogeneidade do espaço.

Na geometria métrica de Birkoff [6], que é a abordagem da geometria euclideana adotada em todos os livros de geometria para o Ensino Médio ou Fundamental, postula-se que todo ângulo possui uma medida, e define-se que dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida e que um ângulo é reto se mede 90 graus. Nessa abordagem, o Postulado 4 é uma proposição trivial. Antes de Birkoff, sem usar números reais, Hilbert explicitou diversos postulados ou resultados implicitamente assumidos por Euclides (sobre congruência de ângulos, sobre a propriedade da reta separar um plano em dois semiplanos, etc) e, usando-os, demonstrou ([4, Teorema 21], ver também [6, Theorem 8.2.3]) o Postulado 4; ou seja, mostrou que ele é um postulado supérfluo também na *geometria sintética*. Hilbert atribui o resultado a Proclus, matemático e filósofo que viveu no século V. Nestas notas, essa demonstração é vista no Teorema 7.13.

Definição 1.8. *Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s.*

Na geometria espacial, exige-se também que duas retas paralelas sejam coplanares, mas estas notas tratam apenas da geometria plana.

Postulado 5. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta paralela a r que passa por P.*

A formulação original do Quinto Postulado é: "fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos". Em outras palavras, suponha que sejam dadas três retas r, s e t, que t intersecta r e s, e que, em um dos lados de t a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Então r e s se encontram no lado de t em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Para formular seu postulado nesses termos, Euclides assumiu implicitamente diversos postulados sobre congruência de ângulos e sobre os dois lados que uma reta define no plano. Oportunamente, explicitaremos todos esses postulados implícitos e mostraremos que a formulação original e este enunciado do Postulado 5 que adotamos aqui são equivalentes.

O matemático francês Adrien Marie Legendre, que viveu de 1752 a 1833 e deu importantes contribuições à Mecânica e à Geometria, acreditou que tinha demonstrado o Quinto Postulado. Vamos listar em seguida os passos de uma de suas "demonstrações", sendo dadas a reta r e um ponto P que não está em r. A figura quase indispensável para acompanhar o argumento será omitida neste documento. A leitora pode pegar papel e caneta e desenhar sua própria figura, ou pode consultar a Figura 1.12 de [2].

(1) Seja Q o ponto em r tal que $\overleftrightarrow{PQ}$ e r sejam perpendiculares.
(2) Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$. Então s é paralela a r.
(3) Seja t uma reta que passa por P e é diferente de s. Queremos provar que t e r se interceptam.
(4) Seja R um ponto que está em t e está no mesmo lado de s que r.
(5) Seja R' um ponto do lado oposto ao de R relativamente à reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que $\angle QPR \simeq \angle QPR'$.
(6) O ponto Q está no interior do ângulo $\angle RPR'$, logo a reta r, que passa por Q, intesecta um dos lados desse ângulo, $\overrightarrow{PR}$ ou $\overrightarrow{PR'}$.
(7) Se a reta r intersecta $\overrightarrow{PR}$, está provado o que queríamos, pois P e R são pontos de t.
(8) Suponha que r intersecta $\overrightarrow{PR'}$ e chame sua interseção de A. Tome B pertencente a $\overrightarrow{PR}$ tal que $PA \simeq PB$.
(9) Pelo criério LAL de congruência de triângulos, $\Delta PQA \simeq \Delta PQB$. Logo $\angle PQA$ é congruente a $\angle PQB$.
(10) O ângulo $\angle PQA$ é reto, porque as retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$ são perpendiculares.
(11) Logo $\angle PQB$ também é reto e portanto as semirretas $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ são opostas.
(12) Como Q e A estão em r, B também está em r e é portanto o ponto de encontro das retas r e t.

Temos um desafio bastante complexo pela frente: justificar os passos corretos desta sucessão de argumentos, e detectar a passagem em que Legendre usou sem perceber um fato que só possa ser demonstrado supondo válido o Quinto Postulado, o que torna este um argumento inválido por ser circular. Vamos revisitar esta "demonstração errada" quando a teoria, que começaremos a desenvolver sistematicamente na próxima seção, estiver suficientemente desenvolvida.

2. Axiomas de Incidência

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência plana: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r, (2) os pontos $P, Q, R, \cdots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \cdots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes. Às vezes diremos também que o ponto P "pertence" à reta r se P está em r, mas não usaremos o símbolo de pertencimento $\in$ da teoria dos conjuntos, pois uma reta não necessariamente consiste de um conjunto de pontos. Essa afirmação deve ficar mais clara na Seção 3.

São três os axiomas da Geometria de Incidência:

(I1) Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r que passa por P e por Q.
(I2) Dada uma reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r.
(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

A reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. *O ponto R, distinto de P, está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.*

`Demonstração`: Se o ponto R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então a única reta determinada por P e R é $\overleftrightarrow{PQ}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PQ}$.

Por definição, R é um ponto de $\overleftrightarrow{PR}$. Logo, se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, então R é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$. □

Proposição 2.2. *Dadas duas retas concorrentes r e s, existe apenas um ponto P que está nas duas.*

`Demonstração`: Se existissem dois pontos P e Q ambos pertencentes às retas r e s, pela unicidade postulada no Axioma I1, r e s seriam a mesma reta. Mas, por hipótese, elas são duas retas. □

Proposição 2.3. *Existem (pelo menos) três retas não-concorrentes.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Afirmo que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são distintas e não-colineares. De fato, são três retas distintas porque se duas delas fossem iguais, os três pontos seriam colineares (Proposição 2.1). E, pela Proposição 2.2, B é o único ponto que pertence simultaneamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, se as três retas fossem concorrentes, B pertenceria a $\overleftrightarrow{AC}$, contradizendo o fato de que A, B e C não são colineares. □

Proposição 2.4. *Dada uma reta r, existe pelo menos um ponto P que não está em r.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Pelo menos um dos três pontos não está em r, caso contrário, os três pontos seriam colineares. □

Proposição 2.5. *Dado um ponto P, existe pelo menos uma reta que não passa por P.*

`Demonstração`: Se todas as retas passassem por P, não existiriam três retas não-concorrentes, contrariando a Proposição 2.3. □

Proposição 2.6. *Dado um ponto P, existem pelo menos duas retas que passam por P.*

Problema 2.1. Demonstre a Proposição 2.6.

3. Modelos

Dado um sistema axiomático, tal como a Geometria de Incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*. Os axiomas da geometria de incidência são tão frouxos que permitem a existência de modelos completamente diferentes entre si, como veremos a seguir. Em todos os exemplos, usaremos teoria dos conjuntos. Em dois deles, usaremos os números reais.

As proposições que se demonstrem usando apenas os axiomas (I1), (I2) e (I3) e suas consequências são automaticamente válidas em qualquer modelo da Geometria de Incidência.

O Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} \coloneqq \{(x,y);\, ax + by = c\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposições 3.1 e 3.2 expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$ não são colineares pois $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y = 0$, que não passa pelo ponto C; ou seja, também o Axioma I3 é satisfeito. Tudo junto, isso mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência (leia mais sobre isso em [5, Section 2.1] e [6, Chapter 2]).

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2).*

`Demonstração`: Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, é imediato verificar que as equações equivalentes

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1) \iff (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1 \tag{1}$$

são satisfeitas pelos dois pontos dados. O par de coeficientes $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$ é diferente de $(0, 0)$ porque os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são distintos. Logo $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados. Isto prova a existência.

Suponha que $ax + by = c$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados, (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Substituindo as coordenadas dos dois pontos na equação e subtraindo as duas equações assim obtidas, obtemos

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0. \tag{2}$$

Se $x_1 = x_2$ e $y_2 \neq y_1$, segue de (2) que $b = 0$ e, então, pois $(a, b) \neq (0, 0)$, que $a \neq 0$. A equação $ax + by = c$ se reduz portanto a $ax = c$ ou, equivalentemente, $x = \frac{c}{a}$. Como essa reta passa por (x_1, y_1), segue que $\frac{c}{a} = x_1$ e portanto a equação pode ser reescrita como $x = x_1$, que é o que se obtém fazendo $x_1 = x_2$ em (1) e cancelando $(y_2 - y_1)$, que é diferente de zero. O mesmo argumento, trocando as letras, também mostra que, se $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$, então a equação (2) se reduz a $y = y_1$, que é o que se obtém em (1) fazendo $x_1 = x_2$, tendo $y_1 \neq y_2$. Resta considerar o caso em que $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são não nulos (o caso em que ambos são nulos não ocorre porque os pontos são distintos). Segue de (2) e de $(a, b) \neq (0, 0)$ que a e b são diferentes de zero e que $b = a\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$. Substituindo esta igualdade em $ax + by = c$, vem

$$ax + a\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}y = c.$$

Como o ponto (x_1, y_1) satisfaz esta equação, vem

$$ax_1 + a\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}y_1 = c.$$

Igualando os dois primeiros membros das duas últimas equações e cancelando o a, vem

$$x + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}y = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}y_1,$$

que é equivalente à segunda das duas equações equivalentes em (1).

Separando em três casos, acabamos de provar que, dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), se L é uma reta que passa por ambos os pontos, então L é a reta de equação $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$. Ou seja, provamos a unicidade. □

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

`Demonstração`: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

Caso 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{b}{a})$ e $(1, \frac{b}{a})$ são dois pontos distintos de r. □

O Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a, $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por

$$L_a \coloneqq \{(x, y) \in P;\, x = a\}, \quad L_{a,r} \coloneqq \{(x, y) \in P;\, (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Veriquemos que os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré. Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em P. Dois casos devem ser considerados: (1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, a reta L_c, $c = x_1 = x_2$, passa por (x_1, y_1) e por (x_2, y_2). Nenhuma reta L_b, com $b \neq c$ passa por (c, y_1) ou (c, y_2). Quaisquer dois pontos numa reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, possuem abscissas distintas. Logo L_c é a única reta passando por (c, x_1) e (c, x_2). No segundo caso, por terem abscissas distintas, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não podem estar em uma mesma reta L_a, $a \in \mathbb{R}$. E eles estão em uma reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se e somente se o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2 \end{array} \right. \tag{3}$$

é satisfeito. Suponha que vale (3). Comparando as duas equações, concluímos que vale também

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2 \tag{4}$$

Daí segue que $x_1^2 - 2ax_1 + y_1^2 = x_2^2 - 2ax_2 + y_2^2$ e, daí,

$$a = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}. \tag{5}$$

Combinada à primeira das equações em (3), (5) implica que

$$r = \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}\right]^2 + y_1^2}. \tag{6}$$

Mostramos que (3) implica (5) e (6). Ou seja, provamos que se existir uma reta do tipo $L_{a,r}$ passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2), então a e r necessariamente serão dados por (5) e (6).

Ou seja, provamos a unicidade de (I1). Para provar a existência, devemos verificar que (5) e (6) implicam (3). Espero que esteja visível para os leitores que (5) e (6) implicam a primeira das equações em (3). Por outro lado, (5) implica (4) (os cálculos que mostraram que (4)$\Longrightarrow$(5) mostram também que (5)$\Longrightarrow$(4)). A equação (4), combinada à primeira das equações em (3), implica a segunda das equações em (3). Isto conclui a demonstração de que o Axioma I1 é satisfeito nesta interpretação da Geometria de Incidência.

Para provar que o Axioma I2 é satisfeito para esta interpretação, de novo é preciso separar em dois casos. Dada uma reta do tipo L_a, $a \in \mathbb{R}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, (a, t), $t > 0$. Dada uma reta do tipo $L_{a,r}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, $(t, \sqrt{r^2 - t^2})$, $-r < t - a < r$. Logo toda reta possui pelo menos dois pontos.

A única reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$ é L_0. Considere o ponto $C = (1, 1)$. Se A, B e C estivessem em uma mesma reta, pela unicidade de (I1) aplicado aos pontos A e B, essa reta seria a reta $\overleftrightarrow{AB} = L_0$ e portanto C pertenceria a L_0. Mas C não pertence a L_0, pois sua abscissa é diferente de 0. Logo A, B e C não são colineares. Logo axioma (I3) é satisfeito.

Geometrias finitas.

O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de "geometria de n pontos" o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 3.1. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas, (b) na geometria de quatro pontos, o Quinto Postulado de Euclides é satisfeito, (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas paralelas a r passando por P.

`O Plano de Fano`. Os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$. As retas são os seguintes subconjuntos de três pontos de S:

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. Este é o Exemplo 6 de [2, Chapter 2], veja lá uma figura ilustrativa. Você pode ler sobre isso também no verbete "Fano plane" da Wikipedia em inglês ou no verbete "Plano de Fano" da Wikipedia em espanhol. O Plano de Fano é um modelo da geometria de incidência em que todas as retas se encontram, cada reta passa por três pontos e por cada ponto passam três retas.

`A geometria dual da geometria de três pontos`. As retas são os elementos do conjunto de três elementos $S := \{A, B, C\}$. Os pontos são os subconjuntos de dois elementos de S. Um ponto P está na reta r se $r \in P$.

A esfera de Riemann.

Os pontos são os elementos de uma esfera, as retas são os *círculos máximos*, ou seja, círculos contidos na esfera e com centro igual ao centro da esfera. Não existem retas paralelas. Esta interpretação não é um modelo da geometria de incidência, pois existem infinitas retas passando dois pontos antipodais dados. Uma maneira de transformar essa interpretação imperfeita em um modelo da geometria de incidência é chamar de pontos os elementos do quociente da esfera pela relação de equivalência que identifica antípodas. As retas são as imagens dos círculos máximos no quociente.

Planos projetivos. Uma explicação mais detalhada, mas ainda incompleta, dos resultados enunciados nesta subseção, é dada ao final do Apêndice (Seção 11).

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides: dados uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r. Sejam r, s e t três retas em P tais que r é paralela a s e s é paralela a t. Então r é paralela a t.*

`Demonstração`: Suponha que r não é paralela a t e seja P o ponto que está em r e em t. Então r e t são duas paralelas a s passando por P, o que contradiz o Quinto Postulado. □

Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides, sejam r e s retas em $\mathcal{P}$ (não-necessariamente distintas). Definimos: $r \equiv s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s. Segue da Proposição 3.3 que $\equiv$ é uma relação de equivalência. Como é de costume, para cada reta r de $\mathcal{P}$, denotamos

$$[r] \ = \ \{s;\ s \text{ é reta de } \mathcal{P} \text{ e } s \equiv r\}$$

Seja $\mathcal{P}^*$ a união disjunta

$$\mathcal{P}^* \ := \ \{P;\ P \text{ é ponto de } \mathcal{P}\} \ \cup \ \{[r];\ r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$$

O *plano projetivo* definido por $\mathcal{P}$ é o seguinte modelo da geometria de incidência. Os pontos são os elementos de $\mathcal{P}^*$. Para cada reta r de $\mathcal{P}$, o subconjunto de $\mathcal{P}^*$ da forma $\{P;\ P \text{ está em } r\} \cup \{[r]\}$ é uma reta. Além destas, que podem ser imaginadas como sendo uma reta de $\mathcal{P}$ acrescida de um *ponto no infinito*, também declaramos que o conjunto $\{[r];\ r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$ é uma reta desse novo modelo. Duas retas sempre se intesectam neste modelo. Dizemos que $\mathcal{P}^*$ é o completamento projetivo de $\mathcal{P}$. Pedindo uma licença poética, diremos que duas retas paralelas de $\mathcal{P}$ agora se encontram no infinito.

O Plano de Fano, acima definido, é o completamento projetivo do modelo mais simples de geometria de incidência que satisfaz o Quinto Postulado, a geometria de quatro pontos, também descrita acima. Para uma interpretação geométrica do completamento projetivo do Plano de Euclides (ou de Descartes), veja [2, Exemplo 2.7, Figura 2.8].

4. Axiomas de Ordenamento

Nesta seção, acrescentamos à formulação axiomática da Geometria iniciada na Seção 2 o termo primitivo "estar entre", enunciamos os axiomas [2] satisfeitos por esse novo termo primitivo e exploramos algumas de suas consequências.

[2]David Hilbert [4] chamou de *Axiome der Anordnung* os axiomas satisfeitos pela noção de "estar entre". Em inglês, em particular nas referências [2, 5, 6] nas quais se baseiam estas notas, usa-se o substantivo abstrato "betweenness" para se referir a essa noção.

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação "B está entre A e C". São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

(B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
(B2) Dados dois pontos B e D, existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
(B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Dados dois pontos A e B, denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.3). Podemos escrever

$$AB := \{A, B\} \cup \{P;\, A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P;\, A * B * P\} \tag{7}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\{\overleftrightarrow{AB}\} := \{P;\, P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B, temos $AB = BA$.*

`Demonstração`: Os pontos extremos dos dois segmentos são os mesmos, logo basta provar que, dado um ponto P, $A * P * B \iff B * P * A$. Mas isto é consequência imediata do item (ii) do axioma (B1). □

Proposição 4.2. *Seja r uma reta, seja O um ponto em r, seja A um ponto que não está em r. Se $A * O * B$ ou se $A * B * O$, então B não está em r.*

`Demonstração`: Em qualquer dos dois casos, $A * O * B$ ou $A * B * O$, segue do Axioma B1 que O está em $\overleftrightarrow{AB}$. Se B estivesse em r, r e $\overleftrightarrow{AB}$ teriam dois pontos em comum, O e B; logo seriam iguais, pela unicidade postulada no Axioma I1; logo A estaria em r, contrariando a hipótese. Logo B não está em r. □

Proposição 4.3. *Sejam Q, A e B pontos colineares, com $A \neq B$. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: Segue de (7) que Q pertence a $\overrightarrow{AB}$ se e somente se uma das seguintes afirmações são verdadeiras: (i) $Q = A$, (ii) $Q = B$, (iii) $A * Q * B$, ou (iv) $A * B * Q$. Equivalentemente, $Q \notin \overrightarrow{AB}$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas. Queremos portanto provar que $Q * A * B$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas.

Se $Q * A * B$, temos: (v) $Q \neq A$ e $Q \neq B$, pelo Axioma B1, e (vi) $A * Q * B$ não ocorre, nem $A * B * Q$, pelo Axioma B3. Logo são falsas as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv).

Reciprocamente, suponhamos que (i), (ii), (iii) e (iv) sejam afirmações falsas. Sendo falsas (iii) e (iv), segue do Axioma B3 e da colinearidade dos três pontos que $Q * A * B$. □

Proposição 4.4. *Dados dois pontos A e B, temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

`Demonstração`: Segue de (7) que $AB \subset \overrightarrow{AB}$. Segue de (7) e da Proposição 4.1 que $AB = BA \subset \overrightarrow{BA}$. Logo $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Suponha que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Queremos provar que $Q \in AB$. Vamos dividir em casos. Se $Q = A$ ou $Q = B$, então segue da definição de segmento que $Q \in AB$. Se Q é diferente de A e diferente de B, então, como todos os pontos das duas semirretas são pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos A, B e Q são colineares, e podemos portanto invocar o axioma (B3) para concluir que uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:

(i) $Q * A * B$,
(ii) $A * Q * B$,
(iii) $A * B * Q$.

Se ocorrer (i), segue da Proposição 4.3 que $Q \notin \overrightarrow{AB}$, o que é falso, pois estamos supondo que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se ocorrer (iii), então $Q * B * A$, pelo axioma (B1). Daí, pela Proposição 4.3, $Q \notin \overrightarrow{BA}$, o que é falso. Logo, se valer $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, então não vale (i), nem vale (iii). Logo vale (ii), o que implica que $Q \in AB$. $\square$

Problema 4.1. Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P;\ P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Cabe aqui um comentário sobre nomenclatura. Adotamos os termos de [2] para a geometria de incidência, nosso ponto de partida para a axiomática completa da geometria euclideana. Para nós, portanto, existe um conjunto de pontos e um conjunto de retas, mas as retas não são necessariamente conjuntos de pontos (veja, por exemplo, a geometria dual da geometria de três pontos, na página 10). É por isso que é preciso considerar a expressão "um ponto está em uma reta" como um termo primitivo, sem definição. Além disso o conjunto de todos os pontos que estão em uma reta não é, em geral, "igual" à reta, pois podem ser objetos de natureza diferente. Em algum modelo (em todos os modelos mencionados nestas notas, exceto o da geometria dual) pode acontecer de r ser igual a $\{P; , P \in r\}$, mas ao tratar da teoria axiomática abstrata, devemos fazer a distinção. Já no texto [3], convenciona-se explicitamente que cada reta é um subconjunto do conjunto de todos os pontos, e "está em" é o "pertence" da teoria dos conjuntos. Hilbert [4] é ambíguo a esse respeito, e o livro dele pode ser lido com uma ou outra convenção.

Dizemos que um segmento AB e uma reta r se interceptam se existe pelo menos um ponto pertencente a AB que também está em r. Isso não exclui a possibilidade de todos os pontos de AB estarem em r, ou que o ponto de interseção seja uma das extremidades do segmento. Vamos reservar a palavra "atravessar" para um tipo mais específico de interseção:

Definição 4.1. Diremos que o segmento AB atravessa a reta r ou, equivalentemente, que r atravessa AB se r e AB se interceptam em apenas um ponto, diferente de A e de B. Em outras palavras, r e AB se atravessam se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r são distintas e concorrentes e se o ponto P de interseção das duas retas satisfaz $A * P * B$.

. Enunciamos agora nosso quarto axioma de ordenamento, conhecido como o "Postulado de Pasch" [4].

(B4) Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos não-colineares que não estão em r. Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Definição 4.2. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A, B e C, denotado por ΔABC, é a união dos segmentos AB, BC e AC, que são chamados de lados do triângulo.*

Proposição 4.5. *Suponha que a reta r intercepta o lado AB do triângulo ΔABC, $r \neq \overleftrightarrow{AB}$. Então r intercepta pelo menos um dos outros dois lados do triângulo. Só intercepta os outros dois lados se C estiver em r.*

`Demonstração`: No caso em que r não passa por A, B, nem C, esta proposição diz exatamente o que diz o Axioma B4. Nos casos em que r passa por um ou dois dos vértices, as afirmações que queremos demonstrar são consequências imediatas da definição de lado de um triângulo e do fato de que os vértices de um triângulo não são colineares. $\square$

Separação do plano.

Dizemos que um conjunto S de pontos é *convexo* se, dados quaisquer dois pontos A e B em S, o segmento AB está todo contido em S. O objetivo desta subseção é mostrar que o conjunto dos pontos que não estão em uma reta é a união disjunta de dois subconjuntos convexos, chamados de "semiplanos" (veja o Problema 4.6).

Definição 4.3. *Dada uma reta r e um ponto A que não está em r, o* semiplano *limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A := \{A\} \cup \{C;\ C \text{ não está em } r,\ C \neq A \text{ e } r \text{ não atravessa } AC\}$.*

O principal resultado desta subseção é o teorema seguinte, que se trata essencialmente de uma versão traduzida e ligeiramente reformulada de [3, Proposition 7.1]

Teorema 4.6. *Toda reta r limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.*

`Demonstração`: Seja X o conjunto dos pontos que não estão em r. Dados A e B em X, diremos que $A \sim B$ se $A \in H_B$.

Por definição, temos que $A \in H_A$. Se $A \in H_B$ e $A \neq B$, então r não atravessa AB, que é igual BA, pela Proposição 4.4; logo r não atravessa BA, logo $B \in H_A$. Isto prova que a relação $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provaremos em seguida que ela também é transitiva.

Suponhamos que $A \sim B$ e $B \sim C$. Queremos provar que $A \sim C$. Claro que podemos supor que os pontos A, B e C são distintos, caso contrário não haveria o que provar. Vamos precisar separar em dois casos: ou esses três pontos são colineares, ou não são.

Suponhamos primeiramente que eles não são colineares. Temos que r não atravessa AB, nem atravessa BC (é isso o que significa $A \sim B$ e $B \sim C$). Se r atravessasse AC, seguiria, pelo Axioma B4, que r atravessaria AB ou BC, o que é falso. Logo r não atravesa AC, ou seja $A \sim C$.

Suponhamos agora que A, B e C são colineares e chamemos de s a reta que os contém. Por definição de X, cada um dos três pontos A, B e C não está em r, logo r e s são duas retas distintas. Pelo Axioma I2, r possui pelo menos dois pontos. Pelo menos um deles não está em s, caso contrário a unicidade do Axioma I1 implicaria que r seria igual a s. Seja portanto D um ponto de r que não está em s. Pelo Axioma B2, existe um ponto E tal que $E * A * D$. O ponto E não está em r, pela Proposição 4.2. Temos que $A \sim E$ pois, se existisse um ponto P tal que $E * P * A$, esse ponto seria o único (veja a Proposição 2.2) ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e s, ou seja, P seria igual a D, logo teríamos $E * D * A$ e $E * A * D$, o que não pode acontecer, pelo Axioma B3. O ponto E também não está em s, de novo pela Proposição 4.2, pois $E * A * D$. Então temos $E \sim A$, $A \sim B$ e os três pontos E, A e B são não colineares. Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim B$. Logo temos $E \sim B$ e $B \sim C$, sendo E, B e C não-colineares (pois E não está em s, que é igual a $\overleftrightarrow{BC}$). Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim C$. Logo temos $C \sim E$ e $E \sim A$, sendo C, E e A não colineares, logo (usando pela terceira vez o mesmo argumento) $C \sim A$, ou seja, $A \sim C$, como queríamos.

Provamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em X. Por definição, os semiplanos determinados por r são as classes de equivalência de associadas a esta relação de equivalência. Queremos provar que o conjunto das classes das equivalência $X/\sim$ possui exatamente dois elementos.

O conjunto X é não vazio, pela Proposição 2.4. Logo $X/\sim$ é não vazio. Seja A um elemento de X. Pelo Axioma I2, segue que existe um ponto O que está em r. Pelo Axioma B2, existe um ponto B tal que $A * O * B$. O ponto B não está em r, pela Proposição 4.2. Logo A e B são dois pontos de X. A reta r atravessa AB, pois o ponto O está em r e pertence a AB. Ou seja, $A \notin H_B$; ou seja, A e B pertencem a classes de equivalência distintas. Provamos que $X/\sim$ possui pelo menos dois elementos.

Para concluir a demonstração, devemos provar que, dados três pontos que não estão em r, pelo menos um par deles pertence a um mesmo semiplano. Tomemos arbitrariamente três pontos A, B e C de X. Basta provar, sem perda de generalidade, que, se r atravessar AB e AC, então r não atravessará BC. Isto segue do "apenas um" do Axioma B4, caso A, B e C não sejam colineares. Suponhamos agora que A, B e C sejam colineares. Vamos precisar usar de novo a construção que fizemos para provar a transitividade, mas agora o argumento é mais fácil porque já sabemos que $\sim$ é transitiva. Seja D um ponto que está em r, mas não está na reta s que contém os pontos A, B e C, seja E tal que $E * A * D$. Provamos acima que $A \sim E$ e que os pontos B, C e E são não-colineares. Como estamos supondo que $A \not\sim C$ e $A \not\sim B$, segue da transitividade de $\sim$ que $C \not\sim E$ e $B \not\sim E$. Temos portanto três pontos não colineares B, C e E tais que r atravessa BE e CE. Segue do Axioma B4 que r não atravessa BC. $\square$

Dada uma reta r, os dois semiplanos determinados por r serão também chamados de *lados* de r. Diremos que dois pontos A e B estão *do mesmo lado* de r se $A \in H_B$ e diremos que A e B estão *em lados opostos* de r se $A \notin H_B$.

Proposição 4.7. *Sejam A, B e C três pontos que não estão na reta r. São verdadeiras as seguintes afirmações.*

(1) *Se A e B estão do mesmo lado de r, se B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*
(2) *Se A e B estão em lados opostos de r, se B e C estão em lados opostos de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*
(3) *Se A e B estão em lados oposto de r, se B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão em lados opostos de r.*

`Demonstração`: Vimos na demonstração do Teorema 4.6 que a relação definida pela sentença "$A \sim B \iff A \in H_B$" é uma relação de equivalência no conjunto X dos pontos que não estão em r, e que a classe de equivalência de um ponto $A \in X$ é igual a H_A.

Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então $A \in H_B$ e $B \in H_C$. Logo, $A \in H_C$, pela transitividade de $\sim$. Logo A e C estão do mesmo lado de r, o que prova (1).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão em lados opostos de r, então $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$. Vimos na demonstração do Teorema 4.6 que $\sim$ possui duas, e só duas, classes de equivalência. Segue da hipótese da afirmação (2) que A e C não pertencem à classe de equivalência que contém B, logo A e C pertencem à outra classe de equivalência, distinta de H_B. Logo, $A \sim C$; ou seja, $A \in H_C$; ou seja, A e C estão do mesmo lado de r. Provamos (2).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão do mesmo lado de r, então $A \not\sim B$ e $C \sim B$. Segue então que $A \not\sim C$ (veja a Proposição 11.1). Logo A e C estão em lados opostos de r, o que conclui a demonstração. □

Cabe aqui um comentário sobre as diferentes abordagens adotadas pelos livros da nossa bibliografia.

Em vez de fazer como Hilbert [4] e Hartshorne [3] que adotam o Postulado de Pasch como o quarto axioma de ordenamento, Greenberg [2] convenciona, sem a princípio definir o que é o lado de uma reta, que a frase "A e B estão do mesmo lado de uma reta r" significa que ou os pontos A e B são iguais e não estão em r, ou os pontos A e B são distintos, não estão em r, e r atravessa AB. E convenciona que a frase "A e B estão em lados opostos de r" significa que A e B não estão em r e r atravesa AB. Daí ele adota como quarto axioma de ordenamento que as afirmações (1) e (2) da Proposição 4.7 são sempre válidas, dados A e B fora de r. Com estas convenções, a afirmação (3) é uma consequência lógica imediata de (1) e (2).

Quase todo o trabalho que fizemos nesta subseção é, essencialmente, a demonstração de que o Postulado de Pasch (nosso Axioma B4) implica que o quarto axioma de ordenamento de Greenberg é verdadeiro. A recíproca também é verdadeira, e é bem mais fácil de provar: o "B4 do Greenberg" implica o nosso Axioma B4, que é chamado então de Teorema de Pasch em [2, 6]. A grande vantagem da abordagem de Greenberg é que fica mais rápido provar a Separação do Plano. Uma desvantagem é ter de lidar com definições para o significado das frases "A e B estão do mesmo lado de r" e "A e B estão em lados opostos de r" sem definir antes o que são "lados" de uma reta (isto não está errado, mas é um pouco incômodo). A maior desvantagem talvez seja (esta é uma afirmação bastante subjetiva) que o Postulado de Pasch parece muito mais natural, pode ser facilmente visualizado com uma figura, do que o "B4 do Greenberg", que pode soar como uma afirmação excessivamente formal.

Ordenamento de quatro pontos.

Nesta subseção, vamos usar que cada reta divide o plano em dois semiplanos para compreender como se pode ordenar mais de três pontos na reta.

Proposição 4.8. *Se $A * B * C$ e $A * C * D$, então vale $B * C * D$ e $A * B * D$.*

`Demonstração`: Segue das hipóteses e do Axioma (B1) que A, B e C são três pontos distintos e que também A, C e D são três pontos distintos, ou seja, temos que

$$A \neq B, \quad A \neq C, \quad A \neq D, \quad B \neq C \ \text{ e } \ C \neq D.$$

Também vale que $B \neq D$ pois, se B fosse igual a D, teríamos $A * B * C$ e $A * C * B$, o que violaria o Axioma B3. Logo os pontos dados são quatro pontos distintos. Seja r a reta determinada por A e C, $r = \overleftrightarrow{AC}$. Segue do Axioma B1 que B e D estão em r, ou seja, os quatro pontos são colineares.

Pela Proposição 2.4, existe um ponto E que não está em r. Denotemos por s a reta determinada por E e C, $s = \overleftrightarrow{EC}$. Pela Proposição 2.2, C é o único ponto que está simultaneamente em r e em s.

Segue da hipótese $A * C * D$ que A e D estão em lados opostos de s. Provemos agora que A e B estão do mesmo lado de s: se A e B estivessem em lados opostos de s, existiria um ponto X em s tal que $A * X * B$, X estaria em r pois é um ponto do segmento AB e A e B estão em r, logo X seria igual a C, mas então teríamos $A * C * B$ e $A * B * C$, o que violaria o Axioma B3.

Vimos portanto que A e D estão em lados opostos de s e A e B estão do mesmo lado de s. Segue da Proposição 4.7 que B e D estão em lados opostos de s. Logo existe Y em s tal que $B * Y * D$. Mas $B * Y * D$ implica que Y está na reta r (Axioma (B1)). Logo Y é o único ponto de interseção de r e s, $Y = C$. Logo $B * C * D$.

A prova de que vale $A * B * D$ é análoga e será apenas esboçada. Sejam r e E como na primeira parte demonstração. Façamos $t := \overleftrightarrow{EB}$. Então A e C estão em lados opostos de t e C e D estão do mesmo lado de t. Logo A e D estão em lados opostos de t. O ponto de interseção do segmento AD com a reta t tem de ser igual a B, pois ele é a interseção das retas r e t. Logo $A * B * D$. $\square$

O argumento que usamos duas vezes na demonstração da Proposição 4.8 pode ser usado mais duas vezes para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 4.9. *Se $A * B * C$ e $B * C * D$, então vale $A * B * D$ e $A * C * D$.*

`Demonstração`: Seja r a reta que passa pelo quatro pontos dados, seja E um ponto que não está em r, seja s a reta que passa por E e C, seja t a reta que passa por E e B. Então B e D estão em lados opostos de s, A e B estão do mesmo lado de s, logo A e D estão em lados opostos de s e portanto $A * C * D$. Além disso, A e C estão em lados opostos de t, C e D estão do mesmo lado de t, logo A e D estão em lados opostos de t e portanto $A * B * D$. $\square$.

Definição 4.4. *Dizemos que $A * B * C * D$ se valem as quatro seguintes afirmações: $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$ e $B * C * D$.*

Os enunciados das Proposições 4.8 e 4.9 podem ser resumidos esquematicamente como:

$$(A * B * C \ \wedge \ A * C * D) \ \vee \ (A * B * C \ \wedge \ B * C * D) \implies A * B * C * D \tag{8}$$

(o símbolos $\wedge$ e $\vee$ denotam "e" e "ou", respectivamente).

Problema 4.2. Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$.

Problema 4.3. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
`Sugestão: Use as Proposições 4.3, 4.8 e 4.9.`

Problema 4.4. Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC.

Problema 4.5. [`Pasch para pontos colineares`] Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos colineares que não estão em r. Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Problema 4.6. [`Os semiplanos são conjuntos convexos.`] Seja H um semiplano delimitado pela reta r. Mostre que, se $A, B \in H$ e Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos não-colineares que não estão em r. Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.$A * P * B$, então $P \in H$.

Separação da reta.

Combinando as Proposições 4.3 e 4.8, obteremos agora (compare com o Problema 4.1):

Proposição 4.10. *Suponha que $C * A * B$ e seja r a reta que passa por A, B e C. Então temos*
$$\{P;\ P \text{ está em } r\} \;=\; \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

`Demonstração`: Sabemos que todos os pontos de $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}$ estão em r. Queremos provar que, se P está em r, vale a implicação

$$P \notin \overrightarrow{AB} \implies P \in \overrightarrow{AC}, \tag{9}$$

Como $P \notin \overrightarrow{AB}$, P é diferente de A e de B. Sem perda de generalidade, podemos também supor que $P \neq C$, pois $C \in \overrightarrow{AC}$ pela definição de semirreta. Neste caso, supondo $P \neq C$, segue da Proposição 4.3 que (9) é equivalente a:

$$P * A * B \implies \neg(C * A * P). \tag{10}$$

Vamos provar (10) separando nos três casos possíveis da posição relativa dos três pontos colineares P, B e C. Segue do Axioma (B3) que uma das três afirmações seguintes é satisfeita: (i) $P * C * B$, (ii) $C * P * B$ e (iii) $C * B * P$.

Se valer (i), $P * C * B$ e $C * A * B$ implicam, pela Proposição 4.8, que vale $P * C * A$, o que implica, de novo pelo Axioma B3, que não vale $C * A * P$ (note que, neste caso, a conclusão é independente de se supor que vale $P * A * B$).

Se valer (ii), $C * P * B$ e $P * A * B$ implicam que vale $C * P * A$, e portanto não vale $C * A * P$.

Se valer (iii), $C * B * P$ e $B * A * P$ implicam que vale $C * B * A$, contradizendo a hipótese $C * A * B$. Ou seja, este caso não ocorre. □

Como convencionamos na Definição 1.4, chamamos de *opostas* as duas semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Usando o Problema 4.3, podemos obter a seguinte caracterização mais conveniente dessa propriedade.

Proposição 4.11. *As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se e somente se $B * A * C$.*

`Demonstração`: Suponha que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas. Sendo distintas, segue do Problema 4.3 que $C \notin \overrightarrow{AB}$ e, em particular, que os pontos A, B e C são distintos. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, temos que A, B e C são colineares. Segue de $C \notin \overrightarrow{AB}$ e da Proposição 4.3 que $C * A * B$.

Reciprocamente, suponha que $C*A*B$. Sendo colineares os três pontos, segue do Axioma (I1) que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são distintas porque $C \notin \overrightarrow{AB}$, pelo Problema 4.3. □

Proposição 4.12. *Se $C * A * B$, então $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$.*

`Demonstração`: Pelo Axioma B1, os três pontos A, B e C são colineares; chamemos de r a reta que passa por eles três. Já sabemos que o ponto A pertence a $\overrightarrow{AC}$ e a $\overrightarrow{AB}$. O que queremos portanto provar é que, se $P \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB}$, então $P = A$; ou, equivalentemente, que se P é um ponto distinto de A na reta r, então ou P não pertence a $\overrightarrow{AC}$ ou P não pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Usando a Proposição 4.3, concluímos que o enunciado desta Proposição 4.12 é equivalente a

$$P \text{ ponto em } r,\ P \neq A \quad \Longrightarrow \quad P * A * C \text{ ou } P * A * B. \tag{11}$$

Se $P = C$, já temos, por hipótese, que $P * A * B$. Resta provar (11) quando P for distinto de C. Aplicando o Axioma B3 para os três pontos colineares P, C e A, concluímos que uma das três afirmações seguintes é válida: (i) $P * A * C$, (ii) $A * P * C$, (iii) $A * C * P$. Valendo (i), verifica-se (11). Valendo $A * P * C$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (8) que vale $B * A * P$, verificando (11). Valendo $A * C * P$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (8) que vale $B * A * P$, verificando (11). $\square$

Podemos resumir o conteúdo das três proposições precedentes no seguinte *princípio de separação da reta*:

Um ponto A numa reta separa a reta em duas semirretas opostas que se interceptam em A.

De fato, dado A em r, tome $B \neq A$ em r (B existe pelo Axioma I2); em seguida tome C tal que $C * A * B$ (C existe pelo Axioma B2). Daí temos

$$\{P;\, P \text{ está em } r\} \;=\; \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} \;\text{ e }\; \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}.$$

Teorema da Barra Transversal.

Recorde que estamos denotando (veja a Definição 1.5) por $\angle BAC$ o ângulo que consiste da união das duas semirretas não-opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Definimos agora o *interior* do ângulo $\angle BAC$ como sendo a interseção de dois dos semiplanos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$:

Definição 4.5. *O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos P que satisfazem: (i) B e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (ii) C e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.*

O Teorema 4.14 abaixo é conhecido como o Teorema da Barra Transversal. Em sua demonstração usaremos um argumento que já foi usado na demonstração da Proposição 4.8 e que aqui enunciamos como o seguinte lema.

Lema 4.13. *Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r. Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Então Z e Q estão do mesmo lado de r.*

`Demonstração`: Se Z e Q estivessem em lados opostos de r, existiria W em r tal que $Z * W * Q$. Esse ponto W teria de ser distinto de P pois, se valesse $Z * P * Q$, não valeria $Z \in \overrightarrow{PQ}$ (pela Proposição 4.3). Daí, as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r teriam dois pontos em comum, logo seriam iguais, contrariando a hipótese que Q não está em r. $\square$

A demonstração seguinte é uma versão detalhada de uma que encontrei na página de Bruce Conrad, professor emérito da Universidade de Temple, Filadélfia. Vale a pena olhar o original, especialmente por causa da figura: https://math.temple.edu/∼conrad/crossbar.

Teorema 4.14. *Seja X um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Então a semirreta $\overrightarrow{AX}$ passa por algum ponto do segmento BC (distinto de B e de C).*

`Demonstração`: Pelo Axioma (B2), existe um ponto D tal que $D * A * B$. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ cruza o segmento BD em A. Os pontos B, C e D não são colineares, pois D está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e C não está. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ não passa por B, nem C, nem D (se passasse, $\overleftrightarrow{AX}$ conteria um dos lados do ângulo $\angle BAC$, o que não ocorre porque X está no interior do ângulo, que implica em particular que X não está em $\overleftrightarrow{AB}$, nem em $\overleftrightarrow{AC}$). Segue então do Axioma B4 aplicado aos pontos B, C e D que a reta $\overleftrightarrow{AX}$ atravessa ou o segmento BC ou o segmento CD. Seja Y um ponto tal que $Y * A * X$. Segue da Proposição 4.10 que todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{AX}$ ou a $\overrightarrow{AY}$. Para provar que $\overrightarrow{AX}$ atravessa BC, basta portanto provar que $\overrightarrow{AY}$ não intercepta BC nem DC, e $\overrightarrow{AX}$ não intercepta DC.

Vamos denotar por $\sim_{AB}$ ou $\sim_{AC}$ as relações de equivalência "estar do mesmo lado" de $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Por hipótese, X e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Logo, Y e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{DC}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$. Pelo Lema 4.13, temos que $Z_1 \sim_{AB} C$ e $Z_2 \sim_{AB} Y$. Como $C \not\sim_{AB} Y$, segue que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$. Provamos que nenhum ponto de $\overrightarrow{AY}$ pode ser igual a um ponto de $\overrightarrow{DC}$. Em particular, $\overrightarrow{AY}$ não intercepta DC.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Por hipótese, X e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, Y e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{CB}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$. Pelo Lema 4.13, então $Z_1 \sim_{AC} B$ e $Z_2 \sim_{AC} Y$. Como $B \not\sim_{AC} Y$, segue que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Em particular $Z_1 \neq Z_2$. Daí segue que $\overrightarrow{AY}$ não intecepta BC.

O ponto D e o ponto B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$ (pois DB e $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A). O ponto B e o ponto X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, por hipótese. Logo $D \not\sim_{AC} X$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{CD}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AX}$. Segue do Lema 4.13 e de $D \not\sim_{AC} X$ que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$, e portanto $\overrightarrow{AX}$ não cruza DC. □

Problema 4.7. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 4.8. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Problema 4.9. Considere as semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e os pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$. Mostre que, se H está no interior de $\angle KOL$, então L está no interior de $\angle HOJ$.

5. Axiomas de Congruência

A rigor, o termo primitivo "congruência" (ou "congruente") são na verdade dois termos primitivos, congruência de segmentos e congruência de ângulos. Aceitamos sem definição as frases "o segmento PQ é congruente ao segmento RS" e "o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle EDF$", o que será denotado por $PQ \cong RS$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, e listamos os axiomas que governam o uso dessas expressões.

A ideia intuitiva de congruência, se a gente pensa em geometria como uma descrição do espaço físico a nossa volta, é que duas figuras são congruentes se podem ser levadas de uma até a outra sem deformação, de modo que, quando superpostas, elas coincidam exatamente. Nosso objetivo é tratar congruência formalmente, sem que nossos argumentos dependam dessa ideia intuitiva, que entretanto pode ser usada, cautelosamente, como uma bússola para apontar o caminho da argumentação.

- **(C1)** Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.
- **(C2)** Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.
- **(C3)** Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.
- **(C4)** Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
- **(C5)** Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

Pelo Problema 4.3, se C'' for qualquer ponto distinto de A' da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, então $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ e portanto são iguais os ângulos $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'C''$. Além disso, se $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ então C' e C'' estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$ (isto segue do Lema 4.13). Por isso falamos em unicidade da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, e não do ponto C' no enunciado do Axioma (C4).

A *régua euclideana* é um instrumento ideal que executa o que o Primeiro Postulado de Euclides afirma que é possível fazer: dados dois pontos, traça a única reta que passa por eles. O *compasso euclideano* executa o que o Terceiro Postulado prescreve: dados dois pontos O e A, traça o círculo com centro em O e raio OA. O compasso euclidiano, entretanto, só funciona quando suas duas pontas estão no papel. Ao ser retirado do lugar em que o círculo foi traçado, ele fica frouxo e não preserva o registro do "comprimento" do segmento OA. Para transportar distâncias, os arquitetos usam como ferramenta o *compasso balaústre*, um compasso munido de um parafuso na articulação que permite prender os dois braços do compasso em uma abertura fixa. Os Axiomas (C1) e (C4) poderiam ser interpretados como construções com um compasso balaústre e régua.

Enunciamos agora duas consequências imediatas dos Axiomas (C2) e (C5).

Proposição 5.1. *Se $AB \cong CD$, então $CD \cong AB$.*

`Demonstração`: Por hipótese, $AB \cong CD$. Pela segunda parte de (C2), $AB \cong AB$. Pela primeira parte de (C2), $CD \cong AB$. □

Proposição 5.2. *Se $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle EDF \cong \angle BAC$.*

`Demonstração`: Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle EDF$. Pela segunda parte de (C5), $\angle BAC \cong \angle BAC$. Pela primeira parte de (C5), $\angle EDF \cong \angle BAC$. □

O conteúdo dos Axiomas (C2) e (C5) e das Proposições 5.1 e 5.2 pode ser resumido na sentença "congruência de segmentos e congruência de ângulos são relações de equivalência".

Se $A * B * C$, diz-se que AC é a *adição* dos segmentos AB e BC. Os Axiomas (C1) e (C3) nos dizem que se pode definir a adição de duas classes de equivalência de segmentos. É possível se definir também a multiplicação de classes de equivalência de segmentos e demonstrar que essas operações são comutativas, associativas, distributivas, formando o que se chama de *aritmética dos segmentos* [3, Chapter 4].

Para enunciar o sexto axioma de congruência, precisamos antes definir a noção de congruência de triângulos.

Definição 5.1. *Diremos que os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes, o que denotaremos por $\Delta ABC \cong \Delta CDE$, se os lados correspondentes são dois-a-dois congruentes e se os ângulos correspondentes são dois-a-dois congruentes, isto é, se*

$$AB \cong DE, \quad BC \cong EF, \quad CA \cong FD, \quad \angle ABC \cong \angle DEF, \quad \angle BCA \cong \angle EFD \quad e \quad \angle CAB \cong \angle FDE.$$

É importante observar que a relação congruência de triângulos não se define para pares de triângulos, mas sim para pares de triângulos com vértices ordenados. Se, por exemplo, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e BC e AC não forem congruentes, ΔBAC não será congruente a ΔDEF. Embora, como conjuntos de pontos, os triângulos ΔABC e ΔBAC sejam idênticos, seus vértices estão ordenados de maneiras diferentes.

Problema 5.1. Mostre que congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, mostre que

(1) $\Delta ABC \cong \Delta ABC$,
(2) $\Delta ABC \cong \Delta DEF \implies \Delta DEF \cong \Delta ABC$,
(3) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e $\Delta DEF \cong \Delta GHI \implies \Delta ABC \cong \Delta GHI$

O Axioma C6, os casos LAL e ALA de congruência.

O Axioma (C6), enunciado logo a seguir, é conhecido com o *caso LAL de congruência de triângulos.* Ele é dado como a Proposição 4 do Livro I dos Elementos. Mas, em sua demonstração, Euclides usa o conceito de área, sem definir ou postular do que se trata, e usa também o conceito de movimentos rígidos no plano.

É possível definir área de certas regiões do plano e demonstrar suas propriedades [6, Chapter 14] e é possível axiomatizar a existência de movimentos rígidos e assim preencher as lacunas da demonstração da Proposição I.4 dos elementos [3, Section 17]. A abordagem de Hilbert foi, a menos de uma pitada de sal, tomar o caso LAL de congruência como um postulado. Veremos no final desta subseção que Hilbert tomou como postulado um pouco menos do que o LAL.

(C6) Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Os axiomas (C4) e (C1) nos permitem transportar ângulos e segmentos, respectivamente. Decorre agora do critério LAL que triângulos inteiros podem ser "transportados". Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Dados triângulo ΔABC, segmento $A'B' \cong AB$ e semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe um único ponto C' em H tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: O axioma (C4) nos fornece um ponto X em H tal que $\overrightarrow{A'X}$ é a única semirreta tal que $\angle CAB \cong \angle XA'B'$. Seja C' o ponto, cujas existência e unicidade são garantidas pelo Axioma (C1), tal que $AC \cong A'C'$. Segue do Problema 4.3 que $\angle C'A'B' = \angle XA'B'$, logo $\angle B'A'C' \cong \angle CAB$. Por hipótese, $AB \cong A'B'$. Segue do Axioma (C6) que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Se se toma como postulado o Axioma C6, que garante a congruência de dois triângulos com pares de lados congruentes adjacentes a ângulos congruentes, podemos demontrar a congruência de dois triângulos com pares de ângulos congruentes cujos lados adjacentes comuns também sejam congruentes. Em outras palavras, assumindo o critério LAL como verdadeiro, podemos agora demonstrar o critério ALA:

Proposição 5.4. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares, sejam A', B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Seja X o único ponto da semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $BC \cong B'X$ (a existência e a unicidade de X decorrem do Axioma C1). Temos, por hipótese, $AB \cong A'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'X$ ($\angle A'B'X = \angle A'B'C'$ pelo Problema 4.3, porque $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'X}$) e, por construção, $BC \cong B'X$. Segue portanto do Axioma C6 que

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'X \tag{12}$$

e, em particular, que

$$\angle CAB \cong \angle XA'B'. \tag{13}$$

O Lema 4.13 aplicado à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ e ao ponto C' implica que os pontos C' e X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. A hipótese $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, (13) e a unicidade do Axioma (C4) implicam a igualdade de semirretas $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'X}$, o que implica, em particular, que X é o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$, ou seja, $X = C'$ e, portanto, (12) é a afirmação que queríamos demonstrar. □

Em vez de assumir o Axioma (C6), Hilbert assume apenas o seguinte axioma [4, Axioma IV-6], aparentemente mais fraco:

(C6h) Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

O seguinte problema é o Teorema 11 de [4]. Ele pode ser resolvido imitando a demonstração da Proposição 5.4. Hilbert demonstra o Teorema 11 e afirma que a Proposição 5.4 (enunciada sem demonstração como o Teorema 12 em [4]) pode ser demonstrada de maneira semelhante.

Problema 5.2. Mostre que (C6h) implica (C6). Sugestão: (i) mudando de notação, obtenha mais uma congruência de ângulos, (ii) suponha que a terceira congruência de lados não seja satisfeita, transporte o segmento CB para a semirreta $\overrightarrow{C'B'}$ e note que a unicidade de (C4) terá sido violada.

O Teorema do Triângulo Isósceles.

A proposição seguinte afirma que se dois lados de um triângulo são congruentes, então os dois ângulos adjacentes ao terceiro lado são congruentes. Triângulos que têm essa propriedade são chamados de isósceles e este resultado é conhecido como o "teorema do triângulo isósceles".

Proposição 5.5. *Se A, B e C são três pontos não-colineares e $AB \cong AC$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.*

`Demonstração`: Considere os triângulos com vértices ordenados ΔABC e ΔACB. Por hipótese, temos $AB \cong AC$. Segue da Proposição 5.2 que $AC \cong AB$. Segue da definição de ângulo que $\angle BAC = \angle CAB$, daí, pela segunda parte do Axioma (C5), temos $\angle BAC \cong \angle CAB$. Segue do Axioma (C6) com $A' = A$, $B' = C$ e $C' = B$ a congruência $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Em particular, $\angle ABC \cong \angle ACB$. □

Esta demonstração que acabamos de dar do Teorema do Triângulo Isósceles é devida a Papus, que viveu seis séculos depois de Euclides, ambos em Alexandria. A demonstração de Papus é muito mais curta do que a demonstração do mesmo teorema dada por Euclides na Proposição 5 do Livro I dos Elementos. O que permitiu a simplificação do argumento foi o uso do caso LAL de congruência de triângulos para um mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes. Euclides só usava o LAL para dois triângulos diferentes. Papus deu um salto formal ao considerar como dois entes distintos o mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes.

A recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles pode ser demonstrada imitando a demonstração da Proposição 5.5, usando o caso ALA em vez do LAL. Isto fica como exercício:

Problema 5.3. Sejam A, B e C três pontos não-colineares. Mostre que, se $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $AB \cong AC$.

6. Consequências dos Axiomas de Congruência

A adição de segmentos pode ser definida como uma aplicação do Axioma C3. Nesta seção, definimos subtração de segmentos e adição e subtração de ângulos. Essas operações são "sintéticas", no sentido que não dizem respeito a números, ou medidas, mas apenas a entes geométicos. Como aplicação da subtração de segmentos, veremos a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles. Como aplicação da adição de ângulos, veremos o criério LLL de congruência de triângulos.

Subtração de segmentos. Congruência dos suplementares de congruentes. Opostos pelo vértice.

Provaremos na Proposição 6.2 uma afirmação análoga ao Axioma C3 para subtração. Antes, um lema.

Lema 6.1. *Se $A * B * C$, a semirreta $\overrightarrow{BC}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AC}$.*

`Demonstração`: Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e $Y = C$, $Y \in \overrightarrow{AC}$ por definição de semirreta. Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e $Y = B$, $Y \in \overrightarrow{AC}$ porque, por hipótese, $A * B * C$. Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e Y é diferente de B e de C, podem ocorrer dois casos: (i) $B * Y * C$ ou (ii) $B * C * Y$. Valendo (i) e a hipótese $A * B * C$, segue da Proposição 4.8 que $A * Y * C$ e, portanto, $Y \in \overrightarrow{AC}$. Valendo (ii) e $A * B * C$, segue da Proposição 4.9 que $A * C * Y$ e, portanto, $Y \in \overrightarrow{AC}$. □

Proposição 6.2. *Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$, então $BC \cong B'C'$.*

`Demonstração`: Invoquemos o Axioma (C1) para obter o único ponto $X \in \overrightarrow{B'C'}$, tal que $X \neq B'$ e $B'X \cong BC$. Como $X \in \overrightarrow{B'C'}$ e $X \neq B'$, temos $X \notin \overrightarrow{B'A'}$ (pela Proposição 4.12) e, portanto, $A' * B' * X$ (pela Proposição 4.3). Temos, por hipótese, $AB \cong A'B'$ e, por construção, $BC \cong B'X$. Segue do Axioma (C3) que $AC \cong A'X$. Além disso, pelo Lema 6.1, $X \in \overrightarrow{A'C'}$. Logo X é o único ponto da semirreta $X \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $AC \cong A'X$. Mas o ponto C' também tem essa propriedade (por hipótese, $AC \cong A'C'$). Logo $X = C'$. Logo $BC \cong B'C'$. □

Recorde que dois ângulos são suplementares se possuem um lado em comum e se os outros dois lados são semirretas opostas (veja a Definição 1.6). A proposição seguinte é o Teorema 13 de [4] e seu enunciado pode ser resumido na frase "os suplementares de ângulos congruentes são congruentes".

Proposição 6.3. *Sejam $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ dois ângulos congruentes, sejam $\angle CBD$ e $\angle C'B'D'$ seus suplementares. Então vale $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.*

`Demonstração`: Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$AB \cong A'B', \quad CB \cong C'B' \quad \text{e} \quad BD \cong B'D' \tag{14}$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma (C1) para substituir os pontos A', B' e C' por novos pontos satisfazendo essa exigência). Segue de LAL (Axioma C6) a congruência $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Em particular, temos

$$AC \cong A'C' \quad \text{e} \quad \angle CAB \cong \angle C'A'B'. \tag{15}$$

Os pontos A, B e D satisfazem $A * B * D$ pois, como segue da definição de ângulos suplementares, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$ são semirretas opostas. Pela mesma razão, temos $A' * B' * D'$. Seguem do Problema 4.3 as igualdades de semirretas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D'}$, logo as igualdades de ângulos $\angle CAD = \angle CAB$ e $\angle C'A'D' = \angle C'A'B'$, o que, combinado às congruências de ângulos em (15) nos leva, pela reflexividade da congruência de ângulos do Axioma (C5), a

$$\angle CAD \cong \angle C'A'D'. \tag{16}$$

Segue (14), de $A * B * C$ e $A' * B' * C'$ e do Axioma (C3) que $AD \cong A'D'$. Disto, de (14), de (16) e do Axioma (C6), segue que $\Delta CAD \cong \Delta C'A'D'$. Em particular, usando o mesmo argumento de igualdade de ângulos que nos levou de (15) a (16), obtemos

$$CD \cong C'D' \quad \text{e} \quad \angle BDC \cong \angle B'D'C'. \tag{17}$$

Segue de $BD \cong B'D'$, de (17) e do Axioma (C6) que $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$. Em particular, temos $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$, que é o que queríamos demonstrar. □

Vale também a seguinte recíproca da Proposição 6.3:

Proposição 6.4. *Sejam $\angle ABC$ e $\angle CBD$ ângulos suplementares, seja $\angle A'B'C'$ congruente a $\angle ABC$. Se D' é um ponto fora de $\overleftrightarrow{B'C'}$, D' e A' estão em lado opostos de $\overleftrightarrow{B'C'}$, e $\angle C'B'D' \cong \angle CBD$, então $\angle C'B'D'$ e $\angle A'B'C'$ são suplementares.*

`Demonstração`: Invocando o Axioma B2, tome E' tal que $A' * B' * E'$. Pela Proposição 6.3, temos $\angle CBD \cong \angle C'B'E'$. Por hipótese, D' e A' estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{B'C'}$ e, por construção, A' e E' também estão em lados opostos da $\overleftrightarrow{B'C'}$. Segue portanto da Proposição 4.7 que D' e E' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{B'C'}$. Como ambos os ângulos $\angle C'B'D'$ e $\angle C'B'E'$ são congruentes a $\angle CBD$, segue da unicidade no Axioma C4 que as semirretas $\overrightarrow{B'D'}$ e $\overrightarrow{B'E'}$ são iguais. Segue portanto de $A' * B' * E'$ que $A' * B' * D'$. □

Diremos que dois ângulos são *opostos pelo vértice* se seus quatro lados formam duas retas. Mais precisamente, temos:

Definição 6.1. *Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAE$ são opostos pelo vértice se $B * A * E$ e $C * A * D$.*

Problema 6.1. Usando a Proposição 6.3, mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Adição e subtração de ângulos.

Seguindo [4], obteremos o teorema de adição de ângulos, Teorema 6.6, como consequência da subtração de ângulos (proposição seguinte) e da congruência dos suplementares de ângulos congruentes (proposição precedente).

Proposição 6.5. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior do ângulo $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOL \cong K'O'L'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$.*

`Demonstração`: Pelo Teorema 4.14 (o "teorema da barra transversal"), a semirreta $\overrightarrow{OH}$ intersecta o segmento KL. Chamemos de H_1 esse ponto de interseção. Pelo Problema 4.3, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1}$. Pelo Problema 4.8, H_1 pertence ao interior do ângulo $\angle KOL$. Pelo Problema 4.7, temos $K * H_1 * L$. Substituindo o H dado por H_1 e mudando o nome de H_1 para H, podemos portanto supor sem perda de generalidade que $K * H * L$. Também sem perda de generalidade, podemos supor ademais que

$$OK \cong O'K', \quad OH \cong O'H' \quad \text{e} \quad OL \cong O'L' \tag{18}$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma (C1) para substituir os pontos K', H' e L' por novos pontos satisfazendo essa exigência).

Seguem do Axioma (C6) e das hipóteses que foram adicionadas, sem perda de generalidade, no primeiro parágrafo desta demonstração as congruências

$$\Delta KOL \cong \Delta K'O'L' \quad \text{e} \quad \Delta HOL \cong \Delta H'O'L'. \tag{19}$$

Em particular, temos

$$\angle K'L'O' \cong \angle KLO = \angle HLO \cong H'L'O'$$

(na igualdade do meio, usamos $K * H * L$ e o Problema 4.3). O Axioma (C4) nos diz que existe uma única semirreta $L'X$, com X e K' no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$, tal que $\angle KLO \cong \angle XL'O'$. Os pontos H' e K' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$ porque, por hipótese, H' está no interior do ângulo $\angle K'O'L'$. Logo, tanto H' quanto K' podem fazer o papel de X, logo $\overrightarrow{L'H'} = \overrightarrow{L'K'}$, e portanto L', H' e K' são colineares. Como H' está no interior de $\angle K'O'L'$, segue do Problema 4.8 que $L' * H' * K'$.

Segue agora da Proposição 6.2 ("subtração de segmentos") que KH e $K'H'$ são congruentes ($LH \cong L'H'$ e $KL \cong K'L'$ seguem de (19)). Por (18), OK e $O'K'$ são congruentes. Segue de $\Delta KOL \cong \Delta K'O'L'$ e de $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KL}$ e $\overrightarrow{K'H'} = \overrightarrow{K'L'}$ que os ângulos $\angle OKH$ e $\angle O'K'H'$ são congruentes. Logo, por (C6), temos $\Delta OHK \cong \Delta O'H'K'$, em particular $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$. □

Teorema 6.6. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior de $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$.*

`Demonstração`: Use o Axioma (B2) para obter um ponto J tal que $K * O * J$ e um ponto J' tal que $K' * O' * J'$. Segue do Problema 4.9 que L está no interior de $\angle HOJ$ e L' está no interior de $\angle H'O'J'$. Segue da definição de ângulo suplementar (Definição 1.6) que $\angle HOJ$ é suplementar de $\angle KOH$ e que $\angle H'O'J$ é suplementar de $\angle K'O'H'$. Segue da hipótese $\angle KOH \cong K'O'H'$ e da Proposição 6.3 que $\angle JOH \cong \angle J'O'H'$. Aplicando a Proposição 6.5 com os ângulos $\angle JOH$ e $\angle J'O'H'$ no lugar de $\angle KOL$ e $\angle K'O'L'$, concluímos que $\angle JOL \cong \angle J'O'L'$. Usando novamente a Proposição 6.3, concluímos que $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$. □

Caso LLL de congruência.

O caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos (Proposição 5.4) foi uma consequência razoavelmente simples do caso lado-ângulo-lado (Axioma C6) e dos demais axiomas de congruência de segmentos e de ângulos. O caso lado-lado-lado é mais complicado. Daremos nesta subseção a demonstração de Hilbert [4]. O Lema 6.8 é o Teorema 17 de [4], o Teorema 6.9 é uma versão simplificada do Teorema 18 de [4].

Lema 6.7. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$, seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Temos:*

1. *Se $X * P * Y$, então Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.*
2. *Se $P * X * Y$, então X pertence aos interiores dos ângulos $\angle YZ_1Z_2$ e $\angle YZ_2Z_1$.*
3. *Se $X * Y * P$, então Y pertence aos interiores dos ângulos $\angle XZ_1Z_2$ e $\angle XZ_2Z_1$.*

`Demonstração`: O ponto P é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{XY}$ que satisfaz $Z_1 * P * Z_2$. A existência de P, dados Z_1 e Z_2 como no enunciado, decorre da definição de dois pontos estarem em lados opostos de uma reta. A unicidade decorre da Proposição 2.2 aplicada às retas $r = \overleftrightarrow{XY}$ e $s = \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$.

Se $X * P * Y$, segue do Problema 4.7 que P está no interior dos ângulos $\angle XZ_2Y$ e $\angle XZ_1Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$, pela definição de semirreta, que $Z_1 \in \overrightarrow{Z_2P}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{Z_1P}$. Daí segue, pelo Problema 4.8, que Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.

Se $P * X * Y$, segue do Problema 4.8 que X está no interior dos ângulos $\angle PZ_1Y$ e $\angle PZ_2Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$ que $\angle PZ_1Y = \angle PZ_1Z_2$ e $\angle PZ_2Y = \angle PZ_2Z_1$. Isto prova a segunda afirmação do enunciado. A terceira se prova da mesma maneira, trocando os papéis de X e Y. $\square$

Lema 6.8. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$. Se $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$, então $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$ e, portanto, $\angle XYZ_1 \cong \angle XYZ_2$.*

`Demonstração`: Seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Segue do Axioma B3 que podemos dividir a demonstração em cinco casos:

$$\text{(i) } P = X, \text{ (ii) } P = Y, \text{ (iii) } X * P * Y, \text{ (iv) } P * X * Y, \text{ (v) } X * Y * P.$$

No caso (i), segue da hipótese $YZ_1 \cong YZ_2$ que o triângulo ΔYZ_1Z_2 é isósceles. Segue da Proposição 5.5 e de $Z_1 * X * Z_2$ (X=P) que

$$\angle XZ_1Y = \angle Z_2Z_1Y \cong \angle Z_1Z_2Y = \angle XZ_2Y.$$

Disto e das congruências $Z_1X \cong Z_2X$ (hipótese) e $XY \cong XY$ (Axioma C2), segue pelo Axioma C6 que os triângulos ΔXZ_1Y e ΔXZ_2Y são congruentes, o que é equivalente a dizer que $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$.

No caso (ii), argumento idêntico ao do caso (i), trocando os papéis de X e Y, mostra que $\Delta XZ_1Y \cong \Delta XZ_2Y$ e, portanto, $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$.

Nos três casos restantes, nem X nem Y pertencem à reta $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Segue das hipóteses $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$ que os triângulos ΔXZ_1Z_2 e ΔYZ_1Z_2 são isósceles. Seguem então da Proposição 5.5 as congruências

$$\angle XZ_1Z_2 \cong \angle XZ_2Z_1 \quad \text{e} \quad \angle YZ_1Z_2 \cong \angle YZ_2Z_1. \tag{20}$$

No caso (iii), segue do Lema 6.7-(1) que Z_2 está no interior de $\angle XZ_1Y$ e Z_1 está no interior de $\angle XZ_2Y$. Segue então de (20) e do Teorema 6.6 que

$$\angle XZ_1Y \cong \angle XZ_2Y. \tag{21}$$

No caso (iv), segue do Lema 6.7-(2) e da Proposição 6.5 que vale (21). No caso (v), segue do Lema 6.7-(3) e da Proposição 6.5 que vale (21). Assim, nos casos (iii), (iv) e (v), vale (21). Valem também, por hipótese, $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$. Daí o Axioma C6 nos permite concluir que $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$. $\square$

`Observação`: No caso em que $P = Y$ no lema precedente, os ângulos $\angle Z_1YX$ e $\angle Z_2YX$, que provamos serem congruentes, são também suplementares um do outro, pois $Z_1 * Y * Z_2$. Logo, eles são ângulos retos (veja a Definição 1.7).

Teorema 6.9. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares, sejam A', B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e $CA \cong C'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Usando os axiomas de transporte de ângulos e segmentos (C4) e (C1), podemos obter o único ponto B_2 tal que:

(1) B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$,
(2) $\angle B_2A'C' \cong \angle BAC$,
(3) $A'B_2 \cong AB$.

Segue dos itens (2) e (3), pelo caso LAL de congruência de triângulos, que

$$\Delta A'B_2C' \cong \Delta ABC. \tag{22}$$

Vamos aplicar o Lema 6.8 colocando $X = C'$, $Y = A'$, $Z_1 = B'$ e $Z_2 = B_2$. Pelo item (1), B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$. Segue da congruência de triângulos em (22) que $BC \cong B_2C'$; por hipótese, temos $BC \cong B'C'$; daí segue pelo Axioma C2 que $B_2C' \cong B'C'$. Pelo item (3), temos $AB \cong A'B_2$; por hipótese, temos $AB \cong A'B'$, daí segue pelo Axioma C2 que $A'B' \cong A'B_2$. Podemos portanto invocar o Lema 6.8 para concluir que $\Delta A'C'B' \cong \Delta A'C'B_2$, o que é a mesma coisa que

$$\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B_2C'. \tag{23}$$

Segue de (22), (23) e da transitividade da congruência de triângulos (Problema 5.3) que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Pons Asinorum (a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles).

Apresentamos nesta subseção a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5 do Livro I dos Elementos), em que são usados o critério LAL de congruência de triângulos (Axioma C6), a subtração de segmentos e a congruência dos suplementares. A figura que acompanha a demonstração tem a aparência de uma ponte e em algum momento passou a ser conhecida, na Europa Latina, como "Pons Asinorum" (ponte dos asnos). A alcunha não faz referência apenas à aparência da figura, mas também à dificuldade de se compreender a prova de Euclides. A proposição, apresentada logo no início dos Elementos, era vista como um obstáculo para o leitor iniciante. É possível supor que "pons asinorum" significasse também "mata-burros", um obstáculo feito com ripas ou caibros, comum em estradas da zona rural, que permite a passagem de veículos com rodas e seres humanos, mas não a passagem de quadrúpedes. Só um conhecedor do latim medieval saberá dizer com certeza.

A esta altura, a leitora já deve estar se sentindo confiante para ultrapassar esse obstáculo.

Para escrever a demonstração de Euclides invocando apenas definições, axiomas, proposições e problemas destas Notas de Aula, convém provar primeiro o seguinte lema.

Lema 6.10. *Se temos $X * Y * Z$, $XY \cong X'Y'$ e $XZ \cong X'Z'$ e $Z' \in \overrightarrow{X'Y'}$, então vale $X' * Y' * Z'$.*

`Demonstração`: Seja Z'' o ponto, cuja existência é postulada pelo Axioma C1, pertencente à semirreta [3] oposta a $\overrightarrow{Y'X'}$ tal que $Y'Z'' \cong YZ$. Temos: $X * Y * Z$, $X' * Y' * Z''$, $XY \cong X'Y'$ (por hipótese) e $YZ \cong Y'Z''$ (por construção). Decorre daí, pelo Axioma C3, que $XZ \cong X'Z''$. O ponto Z'' pertence à semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$, pois $X' * Y' * Z''$. Logo Z'' é o único ponto da semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$ tal que $XZ \cong X'Z''$ (a unicidade de um tal ponto é garantida pelo Axioma C1). Mas Z' também é um tal ponto, logo $Z' = Z''$, logo $X' * Y' * Z'$. □

`Segunda demonstração da Proposição 5.5, o ‘‘Teorema do Triângulo Isósceles’’.`

São dados três pontos não-colineares A, B e C tais que $AB \cong AC$. Queremos provar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Pelo Axioma B2, é possível tomar um ponto F tal que $F * B * A$. Em seguida, podemos invocar o Axioma C1 para encontrar o único ponto G na semirreta $\overrightarrow{AC}$, $G \neq A$ tal que $AG \cong AF$. Pelo Problema 4.3, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$. Temos portanto $\angle GAB = \angle FAC$, $AB \cong AC$, e $AF \cong AG$. Segue do Axioma (C6) que são congruentes os triângulos ΔGAB e ΔFAC. Em particular, temos

$$FC \cong BG \quad \text{e} \quad \angle AFC \cong \angle BGA. \tag{24}$$

Aplicando o Lema 6.10, com $X = X' = A$, $Y = B$, $Y' = C$, $Z = F$, $Z' = G$, concluímos que vale $A * C * G$. Daí, pela Proposição 6.2 (subtração de ângulos), vale $FB \cong CG$. Isto e (24) (notando que, pelo Problema 4.3, $\angle AFC = \angle BFC$ e $\angle BGA = \angle BGC$) implicam, pelo Axioma C6, a congruência $\Delta BCF \cong \Delta CBG$. Em particular, segue a congruência

$$\angle CBF \cong \angle BCG. \tag{25}$$

[3] Sobre semirreta oposta, veja a Definição 1.4 e a Proposição 4.11.

Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBF$ são suplementares, também são suplementares os ângulos $\angle ACB$ e $\angle BCG$. Segue portanto de (25), pela Proposição 6.3, a congruência $\angle ABC \cong \angle ACB$, que queríamos demonstrar.

7. Geometria Neutra

Os resultados geométricos que podem ser demonstrados usando apenas os axiomas de incidência, de ordenamento e de congruência formam o que se costuma chamar de "Geometria Neutra". A validade dessses resultados é independente do Quinto Postulado de Euclides, eles são portanto verdadeiros tanto na geometria euclideana (que assume o Quinto Postulado), quanto nas geometrias "não-euclideanas". É possível definir no Plano de Poincaré, por exemplo, noções de ordenamento e congruência que satisfaçam os axiomas de ordenamento e congruência (na Seção 3 verificamos que os axiomas de incidência são satisfeitos). Logo, os resultados que provamos até agora (o teorema da barra transversal, o teorema do triângulo isósceles, o caso LLL de congruência de triângulos, por exemplo) e os que vamos provar nesta seção (existência de perpendiculares, paralelas, pontos médios, bissetrizes) são válidos também no Plano de Poincaré.

Desigualdades entre segmentos e entre ângulos, existência de triângulos isósceles.

Vamos definir nesta subseção a noção sintética (isto é, sem fazer referência a medidas, ou números) de desiguldades entre segmentos e ângulos, e estabelecer suas propriedades.

Definição 7.1. *Dados pontos $A \neq B$ e $C \neq D$ escrevemos $AB < CD$ e $CD > AB$ se existe X tal que $C * X * D$ e $AB \cong CX$.*

Proposição 7.1. *Dados pontos $A \neq B$ e $C \neq D$, vale uma e apenas uma das três afirmações seguintes: (i) $AB < CD$, (ii) $AB \cong CD$, (iii) $AB > CD$.*

`Demonstração`: O Axioma C1 garante a existência de um ponto Z na semirreta $\overrightarrow{CD}$, $Z \neq C$, tal que $AB \cong CZ$. Segue da definição de semirreta que uma e só uma das afirmações seguintes é satisfeita: (i) $C * Z * D$, (ii) $Z = D$ ou (iii) $C * D * Z$. Se valer (i), segue da Definição 7.1 que $AB < CD$. Se valer (ii), então $AB \cong CD$. Resta provar que, se valer (iii), então $CD < AB$. Suponhamos portanto que $C * D * Z$. Pelo Axioma C1, podemos então tomar D' na semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $AD' \cong CD$. Segue do Lema 6.10 que $A * D' * B$. Segue então da Definição 7.1 que $CD < AB$. $\square$

Proposição 7.2. *Se $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$, então $AB < CD$ se e somente se $A'B' < C'D'$.*

`Demonstração`: Suponhamos que $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e $AB < CD$. Da Definição 7.1, temos que existe X tal que $C * X * D$ e $AB \cong CX$. Podemos usar o Axioma C1 para obter um ponto X' na semirreta $\overrightarrow{C'D'}$ tal que $CX \cong C'X'$. Segue do Lema 6.10 que $C' * X' * D'$. Usando o Axioma C2 e a Proposição 5.1 (simetria da congruência), vemos que segue de $AB \cong CX$ e $CX \cong C'X'$ que $AB \cong C'X'$. Por hipótese, temos $AB \cong A'B'$. De novo pelo Axioma C2, segue que $A'B' \cong C'X'$. Provamos que existe X' tal que $A'B' \cong C'X'$ e $C' * X' * D'$, ou seja, provamos que $A'B' < C'D'$.

Da mesma maneira se prova que, se $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e $A'B' < C'D'$, então $AB < CD$. $\square$

Não é imediatamente evidente, apenas a partir da Definição 7.1, que $AB < CD$ seja equivalente a $BA < CD$ e a $AB < DC$, como tem de ser para que possamos falar de desigualdades entre segmentos, já que, como conjunto de pontos, $AB = BA$ e $CD = DC$. Isto agora segue imediatamente da Proposição 7.2 pois, pelo Axioma C2, todo segmento é congruente a si próprio, logo $AB \cong BA$ e $CD \cong DC$.

Proposição 7.3. *Se $A * B * C$, então $AB < AC$.*

`Demonstração`: Dados A, B e C tais que $A * B * C$, devemos mostrar que se verifica a Definição 7.1 no caso em que A toma o lugar de C e C toma o lugar de D. Para isto, basta colocar B no lugar de X. $\square$

A primeira proposição demonstrada por Euclides nos Elementos é a construção de um triângulo equilátero que tenha como um dos lados um segmento dado. Para justificar a construção de Euclides em linguagem moderna mais rigorosa, é necessário adotar algum postulado que garanta que dois círculos, um com o centro sobre o outro, se interceptem. Euclides usa também que se três pontos definem três segmentos congruentes, esses três pontos não são colineares. Mas esse detalhe é fácil de justificar a partir dos axiomas de ordenamento e de congruência de Hilbert, como vemos na proposição seguinte.

Proposição 7.4. *Se A, B e C são três pontos distintos e se $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$, então A, B e C não são colineares e o triângulo ΔABC é equilátero.*

`Demonstração`: Pelo Axioma C2, segue de $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$ que $AC \cong BC$. Resta provar que os três pontos não são colineares. Se fossem, um deles estaria entre os outros dois, pelo Axioma B3. Suponhamos que vale $A * B * C$. Segue então da Proposição 7.3 que $AB < AC$, contradizendo a hipótese $AB \cong AC$ (pela Proposição 7.1). Claro que o mesmo argumento se aplicaria se A ou C fosse o ponto que está entre os outros dois. $\square$

Proposição 7.5. *Se $AB < CD$ e $CD < EF$, então $AB < EF$.*

`Demonstração`: Segue de $AB < CD$ que existe X tal que que $C * X * D$ e $AB \cong CX$. Segue de $CD < EF$ que existe Y tal que $E * Y * F$ e $CD \cong EY$. Usando o Axioma C1, podemos obter um ponto $X' \in \overrightarrow{EY}$ tal que $CX \cong EX'$. Temos portanto $CX \cong EX'$, $CD \cong EY$, $C * X * D$ e $X' \in \overrightarrow{EY}$. O Lema 6.10 implica portanto que $E * X' * Y$. Isto, junto com $E * Y * F$, implica que $E * X' * F$ (usamos a Proposição 4.8). Mas $CX \cong EX'$ e $CX \cong AB$ implicam que $AB \cong EX'$ (usamos o Axioma C2). Ou seja, provamos que existe X' tal que $AB \cong EX'$ e $E * X' * F$, ou seja $AB < EF$. $\square$

Podemos também definir a noção de desigualdade entre ângulos.

Definição 7.2. *Dados $\angle BAC$ e $\angle EDF$, escrevemos $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF > \angle BAC$ se existir X no interior de $\angle EDF$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDX$.*

Tal como no caso de segmentos, vamos provar em seguida que vale a tricotomia, a compatibilidade com a congruência e a transitividade da desigualdade entre ângulos. Antes, um lema:

Lema 7.6. *Dados ângulos $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle XAC \cong X'A'C'$, se X pertencer ao interior de $\angle BAC$ e se X' e B' estiverem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$, então X' pertence ao interior de $\angle B'A'C'$.*

`Demonstração`: Pelo Teorema da Barra Transversal (Teorema 4.14), existe D em $\overrightarrow{AX}$ tal que $B * D * C$. Pelo Axioma C1, existem $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$, e $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tais que $AB \cong A'B''$ e $AC \cong A'C''$. Pelo Problema 4.3, $\angle B'A'C' = \angle B''A'C''$. Segue então da hipótese $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, usando o Axioma C6 (o critério LAL), que $\Delta ABC \cong \Delta A'B''C''$ e, em particular, que $\angle BCA \cong \angle B''C''A'$.

Agora use o Axioma C1 para tomar $D'' \in \overrightarrow{C''B''}$ tal que $CD \cong C''D''$. Temos portanto $AC \cong A'C''$, $CD \cong C''D''$ e
$$\angle D''C''A' = \angle B''C''A' \cong \angle BCA = \angle DCA.$$
Segue do Axioma C6 (LAL) que $\Delta ACD \cong \Delta A'C''D''$ e, em particular, que $\angle DAC \cong \angle D''A'C''$. Por hipótese (e pelo Lema 4.13), X' e B'' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$; por construção, D'' e B'' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$; logo X' e D'' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$. Segue da unicidade do Axioma C3 que $\overrightarrow{A'D''} = \overrightarrow{A'X'}$. Para provar que X' está no interior de $\angle B'A'C'$, basta portanto provar que D'' está no interior de $\angle B'A'C'$ (veja o Problema 4.8).

Já vimos que $X' \sim_{A'C'} D''$ e $X' \sim_{A'C'} B''$, logo $B'' \sim_{A'C'} D''$. Para provar que D'' está no interior de $\angle B'A'C' = \angle B''A'C''$ basta portanto mostrar que D'' e C'' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'B''}$. Como já sabemos que $D'' \in \overrightarrow{C''B''}$, basta provar que $D'' \neq B''$ e que não vale $C'' * B'' * D''$. Segue de $C * D * B$ que $CD < CB$ (Proposição 7.3). Segue de $\Delta ACD \cong \Delta A'C''D''$ que $CD \cong C''D''$. Disso e de $CB \cong C''B''$ segue $C''D'' <$

$C''B''$ (Proposição 7.2). Daí segue que $D'' \neq B''$ e que não vale $C''*B''*D''$ (se valesse, teríamos $C''D'' > C''B''$, pela Proposição 7.3). □

Proposição 7.7. *Dados $\angle BAC$ e $\angle EDF$ vale uma e apenas uma das seguintes três afirmações: (i) $\angle BAC < \angle EDF$, (ii) $\angle BAC \cong \angle EDF$, ou (iii) $\angle BAC > \angle EDF$.*

`Demonstração`: Seja H o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E. Pelo Axioma C4, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AX}$ com $X \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$. Segue dos resultados demonstrados na Subseção "Separação do Plano" que uma e apenas umas das três possibilidades seguintes podem ocorrer: (a) X e F estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$, (b) X está na reta $\overleftrightarrow{DE}$, (c) X e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{DE}$.

Se valer (a), então X pertence ao interior de $\angle EDF$, logo temos $\angle BAC < \angle XDF$. Se valer (b) então X pertence à semirreta $\overrightarrow{DE}$, pois X e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DF}$; logo $\angle EDF = \angle XDF$, logo $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Suponhamos agora que vale (c). Queremos provar que $\angle EDF < \angle BAC$. Note primeiro que (c) implica que X pertence ao interior do suplementar $\angle F_1DE$ de $\angle EDF$. De fato, X e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DF} = \overleftrightarrow{DF_1}$, por construção de X, e X e F_1 estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$ porque X e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{DE}$ e $F_1 * D * F$. Segue então do Problema 4.9 que E pertence ao interior de $\angle XDF$. Para provar o que queremos (ou seja, que $\angle EDF < \angle BAC$), tome agora X' no semiplano H' limitado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contém B e tal que $\angle EDF \cong \angle X'AC$. Pelo Lema 7.6, X' pertence ao interior de $\angle BAC$ (pois E pertence ao interior de $\angle XDF$, $\angle XDF \cong \angle BAC$ e X' e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$). Por definição, temos então que $\angle EDF < \angle BAC$. □

Proposição 7.8. *Se $\angle BAC < \angle EDF$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$, então $\angle B'A'C' < \angle E'D'F'$.*

`Demonstração`: Seja X pertencente ao semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$. Segue da hipótese $\angle BAC < \angle EDF$ que X pertence ao interior de $\angle EDF$.

Seja X' pertencente ao semiplano limitado por $\overleftrightarrow{D'F'}$ que contém E' tal que $\angle B'A'C' \cong \angle X'D'F'$. Segue das escolhas de X e de X' e da hipótese $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ que $\angle XDF \cong \angle X'D'F'$. Usando o Lema 7.6, segue agora da hipótese $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$ e do fato de X pertencer ao interior de $\angle EDF$ que X' pertence ao interior de $\angle E'D'F'$, ou seja, que $\angle A'B'C' < \angle E'D'F'$. □

Está na hora de observar que a definição de desigualdade de ângulos não depende da ordem em que os lados dos ângulos são listados, como tinha de ser. Mais precisamente se $\angle BAC < \angle EDF$, então $\angle CAB < \angle EDF$, $\angle BAC < \angle FDE$, etc. Esta afirmação aparentemente trivial não decorre imediatamente da Definição 7.2. É preciso invocar o Axioma C5 para obter $\angle BAC \cong \angle CAB$ (pois $\angle BAC = \angle CAB$ pela definição de ângulo) e $\angle EDF \cong \angle FDE$ e então aplicar a Proposição 7.8.

Proposição 7.9. *Se $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF < \angle HGI$, então $\angle BAC < \angle HGI$.*

`Demonstração`: Seja W o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E, seja W' o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{GI}$ que contém H. Seja $X \in W$ tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$, seja $Y \in W'$ tal que $\angle EDF \cong \angle YGI$, seja $X' \in W'$ tal que $\angle XDF \cong \angle X'GI$.

Segue das hipóteses $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF < \angle HGI$ que X pertence ao interior de $\angle EDF$ e que Y pertence ao interior de $\angle HGI$, isto é, que

$$H \sim_{GI} Y \quad \text{e} \quad Y \sim_{GH} I \tag{26}$$

(a notação $\sim_{PQ}$ foi introduzida na demonstração do Teorema 4.14). Segue do fato de X pertencer ao interior de $\angle EDF$ e do Lema 7.6 que X' pertence ao interior de $\angle YGI$, isto é, que

$$Y \sim_{GI} X' \quad \text{e} \quad X' \sim_{GY} I. \tag{27}$$

Segue das primeiras equivalências em (26) e em (27) que $H \sim_{GI} X'$. Para provar que X' pertence ao interior $\angle HGI$, basta agora provar que $X' \sim_{GH} I$. Segue do Teorema da Barra Transversal (pois X' pertence ao interior de $\angle YGI$) que o segmento YI atravessa $\overrightarrow{GX'}$ em um ponto $X'' \neq G$. Segue de $Y * X'' * I$ e $Y \sim_{GH} I$ que [4] $X'' \sim_{GH} I$. O segmento $X'X''$ não intercepta $\overleftrightarrow{GH}$ pois $X'' \in \overrightarrow{GX'}$ e $\overleftrightarrow{GX'} \neq \overleftrightarrow{GI}$. Logo $X' \sim_{GH} X''$. Como já temos $X'' \sim_{GH} I$, segue que $X' \sim_{GH} I$ e, portanto, que X' está no interior de $\angle HGI$. Por definição, isto quer dizer que $\angle BAC < \angle HGI$. □

Podemos agora mostrar que existe um triângulo isósceles, com qualquer base dada, sem usar axioma algum sobre interseções de círculos.

Proposição 7.10. *Dado um segmento BC e H um semiplano delimitado por $\overleftrightarrow{BC}$, existe A em H tal que $AB \cong AC$.*

`Demonstração`: Tome arbitrariamente um ponto D em H. Pela recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles (Problema 5.3), se $\angle DBC \cong \angle DCB$, então $DB \cong DC$ e podemos tomar $A = D$. Caso contrário, segue da Proposição 7.7 que ou vale $\angle DBC < \angle DCB$ ou vale $\angle DCB < \angle DBC$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\angle DBC < \angle DCB$. Tome X no interior de $\angle DCB$ tal que $\angle DBC \cong \angle XCB$. Pelo Teorema da Barra Transversal, $\overrightarrow{CX}$ cruza BD em um ponto que chamaremos de A. Temos então $\angle ACB \cong \angle DBC = \angle ABC$. Pela recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles, segue que $AB \cong AC$. Além disso, A e D estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, pois $B * A * D$. Logo A pertence a H. □

Existência da perpendicular, o Quarto Postulado de Euclides.

Duas retas que se interceptam determinam quatro ângulos. De fato, seja O o ponto de interseção das retas r e s, sejam A e C pontos de r tais que $A * O * C$, sejam B e D pontos de s tais que $B * O * D$. Os quatro ângulos formados por r e s são $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle AOD$. Os ângulos $\angle AOD$ e $\angle BOC$ são opostos pelo vértices, logo congruentes (Problema 6.1). O mesmo vale para o par $\angle AOB$ e $\angle COD$. Os demais quatro pares de ângulos formados pelos quatro ângulos determinados por r e s são suplementares. Se um dos quatro ângulos for reto (isto é, congruente a um suplementar seu, veja a Definição 1.7), os quatro serão retos. Neste caso, dizemos que as retas r e s são perpendiculares.

Nesta subseção vamos demonstrar que, dadas uma reta r e um ponto P, existe uma reta s perpendicular a r passando por P. O caso em que P não está em r é tratado no Teorema 7.11, cuja demonstração usa congruência de triângulos. O caso em que P está em r segue facilmente do caso em que P não está em r: o ângulo que alguma paralela a r faz com r pode ser transportado para o ponto que queremos usando o Axioma C5.

Nesta subseção, mostramos também que o Quarto Postulado de Euclides ("todos os ângulos retos são congruentes entre si") é supérfluo, pois essa afirmação pode ser demonstrada a partir dos axiomas de incidência, ordenamento e congruência introduzidos até agora. Na subseção seguinte, o "Quarto Postulado" será usado na demonstração da unicidade das perpendiculares.

Teorema 7.11. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Tomemos dois pontos A e B em r (que existem, pelo Axioma I2). Aplicando a Proposição 5.3 (sobre o transporte de triângulos) ao triângulo ΔABP, tomando no lugar de DE o próprio segmento AB, e escolhendo como o semiplano H o lado de r oposto a P, obtemos um ponto P' em H tal que

$$\Delta ABP \cong \Delta ABP'. \tag{28}$$

Seja Q o ponto de interseção do segmento PP' com a reta r.

Como A e B são dois pontos distintos, então Q é diferente de pelo menos um dos dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Q \neq A$. Basta portanto considerar os casos: (i) $Q * A * B$ e (ii) Q pertence a $\overrightarrow{AB}$. No caso (i), temos dois pares de ângulos suplementares: $(\angle PAQ, \angle PAB)$ e $(\angle P'AQ, \angle P'AB)$. Segue de (28), que $\angle PAB \cong \angle P'AB$. Como suplementares de congruentes são congruentes (Proposição 6.3), temos

[4] Exercício: Mostre que, se A e B são dois pontos em um semiplano, então o segmento AB está contido nesse semiplano.

$\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. No caso (ii), segue de (28) e de $\angle PAQ = \angle PAB$ e $\angle P'AQ = \angle P'AB$ que $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. Ou seja, tanto no caso (i) quanto no caso (ii), temos

$$\angle PAQ \cong \angle P'AQ \tag{29}$$

Podemos aplicar o Axioma C6 aos triângulos ΔPAQ e $\Delta P'AQ$, que têm em comum o lado QA, pois segue de (28) que $AP \cong AP'$ e provamos (29). Daí obtemos, em particular, a congruência de ângulos $\angle PQA \cong P'QA$. Mas estes dois ângulos são suplementares um do outro (pois $P * Q * P'$). Logo são ângulos retos. Provamos que as retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e r são perpendiculares. $\square$.

Problema 7.1. Seja $\angle BAC$ um ângulo reto, seja $\angle B'A'C'$ um ângulo congruente a $\angle BAC$. Então $\angle B'A'C'$ também é um ângulo reto.

Teorema 7.12. *Dada uma reta r e dado um ponto P em r, existe reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Seja Q um ponto qualquer que não esteja em r (a Proposição 2.5 nos garante a existência de um tal Q). Seja t uma reta perpendicular a r passando por Q. Se r passar por P, terminamos. Se r não passar por P, chamemos de X a interseção de t e r. Pelo Axioma C4, existe uma semirreta $\overrightarrow{PY}$ tal que $\angle QXP \cong \angle YPX$. Como $\angle QXP$ é reto, segue do Problema 7.1 que $\angle YPX$ é reto, logo $s := \overleftrightarrow{PY}$ é perpendicualar a r. $\square$

O resultado seguinte é o Teorema 21 de [4]. Hilbert atribui a ideia da demonstração a Proclus, filósofo que nasceu em Constantionopla em 412, estudou em Alexandria e morreu em Atenas em 485.

Teorema 7.13. *Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.*

`Demonstração`: Sejam $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ dois ângulos retos, sejam $\angle CAD$ e $\angle C'A'D'$, respectivamente, seus suplementares (temos portanto $B * A * D$ e $B' * A' * D'$). Temos $\angle BAC \cong \angle CAD$ e $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Queremos provar que $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ são congruentes.

Seja C'' um ponto no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que C e tal que $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$. A existência de C'' decorre do Axioma C4. Decorre também do Axioma C4 que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ se e somente se $C'' \in \overrightarrow{AC}$. Queremos provar, portanto, que C'' está em $\overrightarrow{AC}$.

Suponhamos por absurdo que $C'' \notin \overrightarrow{AC}$ (e, portanto, $C'' \notin \overleftrightarrow{AC}$, pois C'' e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$). Suponhamos, ademais, que B e C'' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. O ponto C'' está então no interior de $\angle BAC$. Segue da Definição 7.2 que $\angle BAC'' < \angle BAC$. Como C'' está no interior de $\angle BAC$ e vale $B * A * D$, segue, pelo Problema 4.9, que C está no interior de $\angle C''AD$, logo vale $\angle CAD < \angle C''AD$. Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle CAD$. Temos portanto

$$\angle BAC'' < \angle BAC \cong \angle CAD < \angle C''AD,$$

logo, pelas Proposições 7.8 e 7.9,

$$\angle BAC'' < \angle C''AD. \tag{30}$$

De $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$ segue, pela Proposição 6.3 (suplementares de congruentes são congruentes), que $\angle C''AD \cong \angle C'A'D'$. Por hipótese, $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Logo, pela transitividade da congruência de ângulos (Axioma C5), vem

$$\angle C''AD \cong \angle C'A'D' \cong \angle B'A'C' \cong \angle BAC'',$$

o que contradiz (30). Logo A e C'' não estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Da mesma maneira se prova que A e C'' não estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Logo $C'' \in \overrightarrow{AC}$. $\square$

Ângulos externos, unicidade da perpendicular, existência da paralela.

Nosso próximo objetivo é demonstrar que um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos dois ângulos internos não-adjacentes.

Chamamos de *ângulo externo* de um triângulo um suplementar de um ângulo do triângulo. Os ângulos do triângulo podem ser chamados, para enfatizar a ideia, de *ângulos internos*. Mais detalhamente, dado o triângulo ΔABC, sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 pontos tais que $A_1 * A * B$, $A_2 * A * C$, $B_1 * B * C$, $B_2 * B * A$, $C_1 * C * A$ e $C_2 * C * B$ (Axioma B2). Os seis ângulos externos de ΔABC são: $\angle A_1AC$, $\angle A_2AB$, $\angle B_1BA$, $\angle B_2BC$, $\angle C_1CB$ e $\angle C_2CA$.

O seguinte resultado é o Teorema 22 de [4]. Hilbert o chama de "Teorema do Ângulo Externo".

Teorema 7.14. *Um ângulo exterior de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

`Demonstração`: Dado o triângulo ΔABC, tome D tal que $D * A * B$ e $AD \cong BC$ (Axiomas B2 e C1). Queremos provar que $\angle ACB < \angle DAC$ e $\angle ABC < \angle DAC$.

Vamos primeiramente provar que $\angle ACB$ e $\angle CAD$ não são congruentes. Suponha por absurdo que são. Nesse caso, temos $AD \cong CB$, $AC \cong CA$ e $\angle DAC \cong \angle BCA$. Pelo criério LAL (Axioma C6), segue $\Delta DAC \cong \Delta BCA$, logo $\angle ACD \cong \angle CAB$. Como $\angle DAC$ e $\angle CAB$ são suplementares e D eB estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, segue, pela Proposição 6.4, que $\angle ACB$ e $\angle ACD$ são suplementares, logo D está em $\overleftrightarrow{CB}$ e em $\overleftrightarrow{AB}$ simultaneamente, logo $D = B$ e $D * A * B$, o que é absurdo.

Como já sabemos que $\angle ACB \ncong \angle CAD$, para provar que $\angle ACB < \angle CAD$, basta provar que $\angle CAD \not< \angle ACB$. Suponhamos então, por absurdo, que temos $\angle CAD < \angle ACB$. Pela definição de desigualdade de ângulos (Definição 7.2), segue que existe X no interior de $\angle ACB$ tal que $\angle XCA \cong \angle CAD$. Pelo teorema da barra transversal (Teorema 4.14), segue que a semirreta $\overrightarrow{CX}$ e o segmento AB se interceptam no ponto que chamaremos de B'. O ângulo $\angle CAD$ é um ângulo externo do triângulo $\Delta ACB'$. Segue pela parte do teorema que já foi demonstrada, aplicada ao triângulo $\Delta ACB'$, que $\angle ACB'$ não é congruente a $\angle CAD$, o que contradiz $\angle ACB' = \angle ACX \cong \angle CAD$. Com isto, provamos que $\angle DAC > \angle ACB$.

Resta provar que $\angle DAC > \angle ABC$. Seja D' tal que $D' * A * C$. Então, por serem opostos pelo vértice, os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'AB$ são congruentes. Pela parte do teorema que já está demonstrada, segue que $\angle D'AB > \angle ABC$. Logo, $\angle DAC > \angle ABC$, pela Proposição 7.8. □

Definição 7.3. *Um ângulo maior do que um reto é chamado de obtuso, um menor do que um reto, de agudo.*

Proposição 7.15. *O suplementar de um ângulo agudo é obtuso, e vice-versa.*

`Demonstração`: Considere o par de ângulos suplementares $\angle ABC$ e $\angle CBD$. Suponha que $\angle ABC$ é obtuso. Logo existe X no interior de $\angle ABC$ tal $\angle ABX$ é reto. Como X está no interior de $\angle ABC$, C está no interior de $\angle XBD$ (Problema 4.9). Logo $\angle CBD < \angle XBD$, que é reto. Logo $\angle CBD$ é agudo. Se $\angle ABC$ for agudo, um argumento análogo mostra que $\angle CBD$ é obtuso. □

Seguem do teorema do ângulo externo as seguintes proposições.

Proposição 7.16. *Pelo menos dois ângulos de um triângulo são agudos.*

`Demonstração`: No triângulo ΔABC, suponha que $\angle CAB$ não seja agudo. Então o ângulo externo no vértice A ou é reto ou é agudo. Em qualquer caso, os ângulos internos em B e em C serão menores do que um reto, pelo Teorema 7.14 e pela Proposição 7.9 (transitividade da desigualdade de ângulos). □

Proposição 7.17. *Dada uma reta r e dado um ponto P, existe no máximo uma reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Precisamos considerar separamente o caso em que P está em r e o caso em que P não está em r.

Suponha primeiro que P não esteja em r. Suponha então, por absurdo, que existam duas retas distintas s e s' passando por P e perpendiculares a r. Os pontos de interseção de s e s' com r são distintos, pois s e s' já possuem o ponto P em comum, e P está fora de r (estamos usando consequências do Axioma I1). Chamemos esses dois pontos de interseção de Q e Q'. Os três pontos P, Q e Q' são não colineares, pois Q e Q' estão em r e P não está. Podemos portanto considerar o triâgulo $\Delta PQQ'$. Esse triâgulo teria dois ângulos retos, contradizendo a Proposição 7.16.

Suponha agora que P esteja em r e sejam s e s' retas perpendiculares a r passando por P. Tome Q em s e Q' em s' que estejam do mesmo lado de r e tome $X \neq P$ em r. Os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ são retos, logo congruentes, pelo Teorema 7.13. Estando os pontos Q e Q' do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{PX} = r$ e sendo os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ congruentes, segue da unicidade do Axioma C4 que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$, logo $s = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PQ'} = s'$. $\square$

Os enunciados do Teorema 7.11, do Teorema 7.12 e da Proposição 7.17 podem ser unificados na seguinte sentença:

Teorema 7.18. *Dada uma reta r e um ponto P, existe uma única reta s passando por P e perpendicular a r.*

A existência de perpendiculares implica na existência de paralelas.

Teorema 7.19. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r, existe (pelo menos) uma reta s paralela a r passando por P.*

`Demonstração`: Seja t a reta perpendicular a r passando por P. Chamemos de Q a interseção de r e t. Seja s a reta perpendicular a t passando por P. Suponhamos por absurdo que s e r não sejam paralelas. Chamemos de R a interseção de s e r. O triângulo ΔPQR teria então dois ângulos retos, o que é um absurdo, pela Proposição 7.16. Logo s e r são paralelas e s passa por P. $\square$

Alternos internos, critério LAA, existência de ponto médio.

Definição 7.4. Seja t uma reta transversal às retas r e s, ou seja, suponha que a reta t intercepta r e s nos pontos B e E, respectivamente. Sejam A e C pontos de r, D e F pontos de s, tais que $A * B * C$ e $D * E * F$, A e D estão do mesmo lado de t, C e E estão do mesmo lado de t. Os ângulos $\angle ABE$, $\angle BEF$, $\angle CBE$ e $\angle BED$ são chamados de ângulos internos. Os pares ($\angle ABE$, $\angle BEF$) e ($\angle CBE$, $\angle BED$) são chamados pares de ângulos alternos internos.

Proposição 7.20. *Se duas retas r e s são atravessadas pela reta t, e um par de ângulos alternos internos é congruente, então r e s são paralelas.*

`Demonstração`: Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado, isto é, vamos provar que, se r e s são concorrentes, então os dois pares de alternos internos não podem ser congruentes.

Usando a notação da Definição 7.4, suponha que as retas r e s se encontram em um ponto P do mesmo lado de t que A e D. Então $\angle PBE = \angle ABE$ e $\angle PEB = \angle DEB$ são ângulos internos do triângulo ΔBEP. O ângulo $\angle BEF$, sendo suplementar a $\angle DEB$ é um ângulo externo de ΔBEP. Pelo Teorema 7.14, os ângulos $\angle ABE$ e $\angle BEF$ não são congruentes. Do mesmo modo, os ângulos $\angle CBE$ e $\angle BED$ não são congruentes porque o primeiro é um ângulo externo do triângulo ΔBEP e o segundo é um ângulo interno não-adjacente ao primeiro.

Se as retas r e s se encontrarem no outro lado de t, o mesmo argumento funciona, apenas trocando os papéis de externo e interno dos pares de ângulos que queremos mostrar que não são congruentes. $\square$

O Teorema do Ângulo Externo tem como consequência mais um critério de congruência de triângulos, o Lado-Ângulo-Ângulo, enunciado como o Teorema 25 de [4] e demonstrada em seguida como a Proposição 7.21.

A demonstração do critério LAA nos livros didáticos da escola básica usa que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus. Essa afirmação sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo depende, naturalmente, de que se defina medida de ângulos, ou ao menos que se dê um significado sintético (sem usar números reais) para a afirmação. Entretanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo só é igual a 180 graus se supusermos válido o Quinto Postulado de Euclides. A demonstração que damos aqui (baseada no Exercício 10 do Capítulo 4 de [2]) não depende do Quinto Postulado, é portanto um resultado de geometria neutra.

O critério LAA terá como consequência a existência do ponto médio de um segmento e a existência da bissetriz de um ângulo.

Proposição 7.21. *Se $AC \cong A'C'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Primeiramente provemos que por absurdo que AB não é maior do que $A'B'$. Suponha que seja. Então existe X, $A * X * B$, tal que $AX \cong A'B'$. Temos $\angle CAX = \angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $AC \cong A'C'$, $AX \cong A'B'$. Segue pelo Axioma C6 (LAL) que $\Delta ACX \cong \Delta A'C'B'$, logo $\angle AXC \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Provamos que o ângulo externo $\angle CXA$ do triângulo ΔCXB é congruente ao ângulo interno $\angle CBX = \angle ABC$ do mesmo triângulo, o que contradiz o Teorema 7.14, pois $\angle CXA$ e $\angle CBX$ não são adjacentes. Analogamente se demonstra que AB não é menor do que $A'B'$ e, portanto, que $AB \cong A'B'$. Segue por LAL que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Definição 7.5. *O ponto M é um ponto médio do segmento AB se $A * M * B$ e $AM \cong BM$.*

Para trocar o artigo indefinido "um" pelo artigo definido "o" nesta definição, é preciso provar que o ponto médio de um segmento, se existir, é único. De fato, temos:

Proposição 7.22. *Sejam A, B, M e M' pontos tais que $A * M * B$, $A * M' * B$, $AM \cong BM$ e $AM' \cong BM'$. Então $M = M'$.*

`Demonstração`: Suponha por absurdo que $M \neq M'$. Segue das hipóteses e do Problema 4.3 que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$. Logo um e apenas um dos dois casos seguintes ocorre: (i) $A * M * M'$ ou (ii) $A * M' * M$. Suponha primeiramente que vale $A * M * M'$. Como temos também que $A * M' * B$, segue pela Proposição 4.8 que $M * M' * B$. Segue de $A * M * M'$, pela Proposição 7.3, que $AM < AM'$. Da mesma maneira, segue de $M * M' * B$ que $BM' < BM$. Combinando essas duas desigualdades às hipóteses, vem

$$AM' \cong BM' < BM \cong AM < AM'$$

Daí, usando as Proposições 7.5 e 7.2, segue que $AM' < AM'$, o que é um absurdo (veja a Proposição 7.1).

No caso em que $A * M' * M$, chegamos a um absurdo com os mesmos argumentos, trocando os papéis de M e M'. □

A existência do ponto médio é o Teorema 26 de [4], que demonstramos a seguir, seguindo o roteiro do Exercício 12 do Capítulo 4 de [2]. A demonstração deste teorema não apenas garante a existência do ponto médio, mas também descreve uma construção para obtê-lo.

Teorema 7.23. *O ponto médio de qualquer segmento de reta existe.*

`Demonstração`: Dado AB tome arbitrariamente ponto C fora de AB. Usando os Axiomas C1 e C4, obtenha um ponto C' tal que $AC \cong BC'$, $\angle CAB \cong \angle C'BA$ e C e C' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Seja M o ponto de interseção de CC' com $\overleftrightarrow{AB}$. Nosso próximo objetivo é provar que vale $A * M * B$, daí seguirá a tese.

Segue do Axioma B3 que uma e apenas uma das seguintes afirmações é satisfeita: (i) $M = A$, (ii) $M = B$, (iii) $M * A * B$, (iv) $A * B * M$, ou (v) $A * M * B$.

As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são atravessadas pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos alternos internos $\angle CAB$ e $\angle C'BA$ são congruentes, por construção. Daí segue, pela Proposição 7.20 que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Se valesse (i), as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AM}$ seriam iguais (Axioma I1), logo C' seria um ponto de $\overleftrightarrow{AC}$, o que não ocorre porque as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Pelo mesmo argumento também não ocorre (ii) pois, se ocorresse, C seria um ponto de $\overleftrightarrow{BC'}$. Se valesse (iii), a reta $\overleftrightarrow{AC}$ interceptaria o segmento MB no ponto A. O "postulado de Pasch" (Axioma B4) aplicado ao triângulo $\Delta MBC'$ (veja a Figura 4.26 de [2]), implica que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ intecepta também ou a reta $\overleftrightarrow{MC'}$ ou a reta $\overleftrightarrow{BC'}$. Já provamos que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ não se interceptam. Se $\overleftrightarrow{AC}$ interceptasse $\overleftrightarrow{MC'}$, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CC'} = \overleftrightarrow{MC'}$ teriam dois pontos em comum, logo teríamos $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CC'}$, o que é impossível pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Logo, não vale (iii). Argumento idêntico aplicado a outros pontos mostra que não vale (iv). Isto prova que vale (v), ou seja, $A * M * B$.

Temos portanto $A*M*B$ e $C*M*C'$, logo os ângulos $\angle CMA$ e $\angle C'MB$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes (Problema 6.1). Temos portanto $AC \cong BC'$, $\angle AMC \cong \angle MBC'$ e $\angle CAM = \angle CAB \cong \angle ABC' = \angle MBC'$. Pelo criétrio LAA de congruência de triângulos (Proposição 7.21), segue $\Delta ACM \cong \Delta BC'M$ e, em particular, $AM \cong BM$. $\square$

A parte da demonstração do Teorema 7.23 que depende apenas dos axiomas de incidência e de ordenamento demonstra a afirmação enunciada a seguir.

Problema 7.2. Suponha que os pontos C e C' estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ sejam paralelas. Mostre que o ponto de interseção do segmento CC' com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está entre A e B.

Bissetrizes.

Definição 7.6. *Dizemos que a semirreta $\overrightarrow{AM}$ é uma bissetriz do ângulo $\angle BAC$ se M pertence ao interior de $\angle BAC$ e $\angle BAM \cong \angle MAC$.*

Não existem duas bissetrizes distintas de um mesmo ângulo:

Problema 7.3. Mostre que, se $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AM'}$ são bissetrizes de $\angle BAC$, então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$.
`Sugestão`: Mostre que não é perda de generalidade supor que B, C, M e M' estão na mesma reta. Daí use as propriedades de desigualdades de ângulos para chegar a um absurdo se M e M' forem distintos.

Vamos dar aqui a demonstração de Euclides (Proposição 9 do Livro I dos Elementos) para a existência da bissetriz de um ângulo, com o acréscimo de dois lemas sobre ordenamento (Lemmas 7.24 e 7.25). No Teorema 7.26, apresentamos o argumento de Euclides com uma pequena modificação: em vez de usar um triângulo equilátero, na nossa construção usamos um triângulo isósceles. A vantagem de fazer assim é não precisar assumir mais um axioma para justificar a construção de um triângulo equilátero (veja o Teorema 9.3, mais adiante)

Lema 7.24. *Sejam A e M pontos em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$ tais que $AB \cong AC$ e $MB \cong MC$. Então M não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ nem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.*

`Demonstração`: Vamos provar por absurdo, separando em casos. Se M for um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, então vale $M*B*A$, pois M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBM$ são portanto suplementares. Pelo teorema do triângulo isósceles, $\angle ABC \cong \angle ACB$ e $\angle CBM \cong \angle BCM$. Logo, $\angle ACB$ e $\angle BCM$ são suplementares (Proposição 6.4). Logo M está também em $\overleftrightarrow{AC}$, logo $M = A$, o que é um absurdo, pois $M * B * A$. Do mesmo modo se chega a um absurdo partindo-se de $M * C * A$. $\square$

Lema 7.25. *Seja M um ponto que não pertence a nenhuma das três retas determinadas pelos pontos A, B e C. Se $\angle BAM \cong \angle CAM$ e M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$, então M está no interior de $\angle BAC$.*

`Demonstração`: Queremos mostrar que $M \sim_{AB} C$ e $M \sim_{AC} B$. Já que temos $\angle BAM \cong \angle CAM$, segue da Proposição 7.7 (tricotomia da desigualdade de ângulos) que basta provar que

$$M \not\sim_{AB} C \implies \angle BAM < \angle CAM \quad \text{e} \quad M \not\sim_{AC} B \implies \angle CAM < \angle BAM$$

Dada a simetria dos papéis desempenhados por B e C nas hipóteses, basta provar a primeira das duas afirmações precedentes. Para tanto, basta provar que $M \not\sim_{AB} C$ implica que B está no interior de $\angle CAM$.

Suponhamos portanto que M e C estejam em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Queremos provar que $B \sim_{AM} C$ e $B \sim_{AC} M$. Seja N um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $M * N * C$. Por hipótese, M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$; logo N e A também estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ (Lema 4.13). Como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm apenas um ponto em comum, e A e N são pontos de $\overleftrightarrow{AB}$, a interseção de AN com $\overleftrightarrow{BC}$ é o ponto B. Logo temos $A * B * N$. Daí segue do Lema 4.13 que $B \sim_{AM} N$ e $B \sim_{AC} N$. Logo, basta mostrar que $N \sim_{AM} C$ e $N \sim_{AC} M$. Mas isto segue de novo do Lema 4.13, pois temos $M * N * C$. $\square$

Teorema 7.26. *Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, existe M no interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAM \cong \angle MAC$.*

`Demonstração`: Modificando, se necessário, a posição de B ou C em um dos dois lados do ângulo $\angle BAC$ (usando o Axioma C1), podemos supor, sem perda de generalidade, que AB e AC são congruentes.

Pela Proposição 7.10, existe um ponto M, no lado de $\overleftrightarrow{BC}$ oposto a A, tal que $BM \cong CM$. Temos $AB \cong AC$, $BM \cong CM$ e $AM \cong AM$. Pelo critério LLL de congruência, segue que ΔABM e ΔACM são congruentes e, portanto, temos $\angle ABM \cong \angle ACM$.

Pelo Lema 7.24, M não está em $\overleftrightarrow{AB}$, nem em $\overleftrightarrow{AC}$ (por construção, também não está em $\overleftrightarrow{BC}$). Daí, pelo Lema 7.25, M pertence ao interior de $\angle BAC$. $\square$

8. O Quinto Postulado e algumas de suas consequências

Usando os axiomas de incidência, ordenamento e congruência, mostramos no Teorema 7.19 que, dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r, existe uma reta paralela a r passando por P. A formulação moderna do Quinto Postulado de Euclides, adotada por Hilbert, é:

(P) Dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r, não existe mais do que uma reta paralela a r que passe por P.

A formulação original, dada na segunda página dos Elementos, em tradução de Irineu Bicudo, é:

(Euc5) Fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Para provar que o postulado **(P)** é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides, precisamos "traduzir" **(Euc5)** para a linguagem de Hilbert. Primeiro diremos o que significa dois ângulos serem menores do que dois retos:

Definição 8.1. *Dados dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$, tome F' no lado de $\overleftrightarrow{AC}$ oposto ao de B tal que $\angle CAF' \cong \angle EDF$. Diremos que a soma de $\angle BAC$ e $\angle EDF$ é menor do que dois retos se (i) $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AF'}$ e (ii) C está no interior de $\angle BAF'$.*

Esta é uma boa definição devido ao Axioma (C4). Usando a Definição 7.4, podemos agora reinterpretar **(Euc5)** como:

(EucH) Seja t uma reta que atravessa as retas r e s, seja B o ponto de interseção de r e t, seja E o ponto de interseção de s e t, sejam $\angle CBE$ e $\angle BEF$ ângulos internos do mesmo lado de t. Se a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ for menor do que dois retos, então as semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{EF}$ se interceptam.

O seguinte teorema é o Theorem 4.5 de [2]. Vale a pena olhar as duas figuras que ilustram sua demonstração.

Teorema 8.1. *Os axiomas* **(P)** *e* **(EucH)** *são equivalentes.*

`Demonstração`: Suponha que o Axioma P é satisfeito. Queremos provar que o Axioma EucH também é satisfeito. Para tanto, tomemos uma reta t transversal às retas r e s, chamemos de B o ponto de interseção de r e t, de E o ponto de interseção de s e t, e suponhamos que os ângulos internos $\angle CBE$ e $\angle BEF$ estejam do mesmo lado de t e somem menos de dois retos. Seja D um ponto tal que $D * E * F$. Como a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ é menor do que dois retos, $\angle CBE < \angle BED$ (use a Definição 8.1, o Problema 4.9 e a Definição 7.2 para justificar esta afirmação). Pelo Axioma (C4), existe uma única semirreta $\overrightarrow{BC'}$ tal que C' e C estão do mesmo lado de t e $\angle C'BE \cong \angle BED$. Pela Proposição 7.20, as retas $\overleftrightarrow{BC'}$ e s são paralelas. Temos $\angle CBE < \angle BED \cong \angle C'BE$, daí as retas $r = \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são distintas. Segue do Axioma P que r e s não são paralelas. Seja X a interseção de r e s. Queremos provar que X e C estão do mesmo lado de t. Por absurdo, suponha que X e D estejam do mesmo lado de t. Daí, $\angle CBE$ é um ângulo externo ao triângulo ΔBEX, não-adjacente ao ângulo interno $\angle BEX = \angle BED$. Mas já vimoe que $\angle CBE < \angle BED$, o que contradiz o Teorema 7.14. Isto prova que X está do mesmo lado de t que E e F e que as semirretas $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{EF}$ se encontram em X. Ou seja, provamos que vale o Axioma EucH.

Reciprocamente, suponha que o Axioma EucH é satisfeito, sejam P um ponto fora da reta r, seja t a única reta perpendicular a r passando por P, e seja s a única reta perpendicular a t passando por P (Teorema 7.18). As retas r e s são paralelas, pela demonstração do Teorema 7.19. Seja q uma reta distinta de s passando por P. Como q não é perpendicular a t, dois dos ângulos determinados por q e t são agudos, opostos pelo vértice. Um desses dois é um ângulo interno relativamente ao cruzamento de q e r. O outro ângulo interno do mesmo lado de t é reto, pois é um ângulo formado pelas retas perpendiculares r e t. Logo, a soma desses dois ângulos internos é menor do que dois retos. Pelo Axioma EucH, as retas q e r se encontram. Provamos que qualquer reta q diferente de s que passe por P não é paralela a r, ou seja, s é a única paralela a r que passa por P. Provamos que é válido o Axioma P. $\square$

É importante frisar que o Axioma P pode ser formulado fazendo menção apenas aos axiomas de incidência, enquanto que o Axioma EucH depende também dos axiomas de ordenamento e congruência. Só faz sentido, portanto, formular (e demonstrar) a equivalência entre os dois postulados num sistema axiomático que englobe ordenamento e congruência. Mas, como vimos no Problema 3.1, por exemplo, faz sentido investigar se o Axioma P é, ou não, válido em modelos de geometria de incidência que não estejam munidos das noções de ordenamento e congruência. Vimos também, na Subseção "Planos Projetivos" da Seção 3 que a construção clássica de plano projetivo pode ser feita também em qualquer geometria de incidência que satisfaça o Axioma P.

9. Construções

Apesar de todo esforço que fizemos para axiomatizar ordem e congruência na geometria euclideana, ainda não podemos justificar rigorosamente, sem apelar para uma figura, a demonstração da primeira proposição dos Elementos, a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Para enunciar o axioma adicional de que necessitamos, será preciso definir interior de círculo, e para isso precisamos antes tratar da desigualdade de segmentos.

Axioma sobre interseção de círculos.

Como já vimos na Definição 1.2, dados dois pontos O e A, o círculo com centro em O passando por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$. O segmento OA é um *raio* do círculo.

Proposição 9.1. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A. Qualquer reta r passando por O intercepta Γ exatamente em dois pontos C e C' que satisfazem $C * O * C'$.*

`Demonstração`: Sejam X e X' dois pontos de r tais que $X * O * X'$ (a existência desses dois pontos decorre dos Axiomas I2 e B2). Pelo Axioma C1, existem únicos $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$ tais que $OC \cong OA$ e $OC' \cong OA$.

Os pontos C e C' estão portanto na interseção de r com Γ. Se P é qualquer ponto da reta r distinto de O que esteja na reta r e no círculo Γ, segue pela Proposição 4.10 que ou $P \in \overrightarrow{OX}$ (neste caso $P = C$) ou $P \in \overrightarrow{OX'}$ (neste caso $P = C'$). Ou seja, C e C' são os únicos pontos de interseção de Γ com r. A demonstração de que $C * O * C'$ fica para o leitor (veja o Problema 9.1). □

Problema 9.1. Seja O, X e X' pontos tais que $X * O * X'$, seja r a reta que os contém. Mostre que, se C e C' são pontos distintos de r tais que $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$, então vale $C * O * C'$.

Qualquer segmento CC', com C e C' como no enunciado da Proposição 9.1, é um *diâmetro* de Γ.

O centro de um dado círculo é unicamente determinado, enquanto que seu raio está determinado a menos de congruência. Mais precisamente, temos [3, Proposition 11.1]:

Proposição 9.2. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A, seja Γ' o círculo de centro O' passando por A'. Se os dois conjuntos de pontos Γ e Γ' são iguais, então $O = O'$ e $OA \cong O'A'$.*

`Demonstração`: Suponha por absurdo que $O \neq O'$. A Proposição 9.1 nos diz que a interseção da reta $\overleftrightarrow{OO'}$ com o círculo Γ consiste de dois pontos, e igualmente para a interseção de Γ' com $\overleftrightarrow{OO'}$. Essas interseções são conjuntos idênticos, pois $\Gamma = \Gamma'$. Sejam C e C' os dois elementos desse conjunto. Sabemos que valem $C * O * C'$ e $C * O' * C'$, mas não sabemos se vale $C * O * O'$ ou $C * O' * O$. Podemos supor sem perda de generalidade que vale $C * O * O'$ (caso contrário, poderíamos trocar os nomes de C e C'). Temos portanto $C * O * O' * C'$ (veja (8)).

Segue da Proposição 7.3 que $O'C' < OC'$ e $OC < O'C$. Segue de $OC \cong OC'$ (C e C' são pontos em um círculo de centro em O) e de $OC < O'C$ que $OC' < O'C$ (Proposição 7.2). Segue de $O'C' < OC'$ e $OC' < O'C$ que $O'C' < O'C$ (Proposição 7.5).

Os pontos C e C' pertencem a Γ', logo $O'C \cong O'C'$, o que seria um absurdo, pois já provamos que $O'C' < O'C$, o que violaria a tricotomia da Proposição 7.1.

Agora que sabemos que $O = O'$, segue imediatamente da definição de círculo que $OA \cong O'A'$. □

Definição 9.1. *Seja Γ um círculo, seja O o centro de Γ, seja OA um raio de Γ. O interior de Γ é o conjunto dos pontos P tais que $OP < OA$ ou $P = O$. O exterior Γ é o conjunto dos pontos Q tais que $OQ > OA$.*

Acrescentamos à nossa teoria mais um axioma, chamado em [2] de "Princípio da Continuidade Circular" que pode ser vagamente interpretado como querendo dizer que o círculo não tem buracos, e portanto é contínuo.

(E) Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos. Se Γ_1 possui pelo menos um ponto no interior de Γ_2 e pelo menos um ponto no exterior de Γ_2, então Γ_1 e Γ_2 possuem exatamente dois pontos de interseção.

Construção de um triângulo equilátero.

Com o auxílio do Axioma E, podemos agora demonstrar a primeira proposição dos Elementos, que descreve a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Na nossa linguagem, podemos reenunciar aquela proposição como o seguinte teorema, ao qual adicionamos a informação de que há duas soluções possíveis para o problema.

Teorema 9.3. *Dados dois pontos A e B, existem C e C' em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que ΔABC e $\Delta ABC'$ são equiláteros.*

`Demonstração`: Seja Γ_1 o círculo com centro em A e raio AB, seja Γ_2 o círculo com centro em B e raio BA. Seja B' tal que $B' * A * B$ e $AB' \cong AB$ (Axioma C1). Por definição, B' é um ponto de Γ_1. Segue da Proposição 7.3 que $BB' > AB$, logo B' é um ponto do exterior de Γ_2. Por outro lado, B é um ponto de Γ_1

que pertence ao interior de Γ_2. Segue do Axioma E que existem dois pontos distintos C e C' que pertencem a Γ_1 e a Γ_2. Daí, $AC \cong AB$, $BC \cong AB$, $AC' \cong AB$ e $BC' \cong AB$ (definição de círculo). vDaí segue, pela Proposição 7.4, que os triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ são equiláteros. Como têm um lado em comum, são congruentes, pelo critério LLL de congruência. Em particular, os ângulos $\angle CAB$ e $C'AB$ são congruentes. Se os pontos C e C' não estivessem em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, as semirretas AC e AC' seriam idênticas, pela unicidade do Axioma C4. Daí C e C' seriam iguais, pela unicidade do Axioma C1 (pois $AC \cong AC'$). □

Transporte de segmentos.

Transporte de ângulos.

Construção do produto.

Construção da raiz quadrada.

10. Os teoremas de Tales e de Pitágoras

11. Apêndice: Relações de Equivalência

Uma *relação* em um conjunto X é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Se R é uma relação em X, é usual denotar $(x, y) \in R$ por $x \sim y$. Frequentemente definiremos uma relação definindo o significado da expressão $x \sim y$, sem fazer referência direta ao subconjunto R de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem $x \sim y$.

Uma *relação de equivalência* em um conjunto X é uma relação em X que satisfaz as três propriedades seguintes:

(1) $x \sim x$, para todo $x \in X$;
(2) se $x \sim y$, então $y \sim x$;
(3) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Chama-se de *simétrica* uma relação que satisfaça (1). Chama-se de *reflexiva* uma relação que satisfaça (2). Chama-se de *transitiva* uma relação que satisfaça (3). Usando esses termos, podemos então dizer que uma relação de equivalência é uma relação simétrica, reflexiva e transitiva.

Dada uma afirmação A, denotamos por $\neg A$ a negação de A, ou seja, a afirmação "A é falsa". Na demonstração da Proposição 11.1 vamos usar a seguinte regra de lógica: provar que as afirmações A e B implicam a afirmação C é equivalente a provar que $\neg C$ e B implicam $\neg A$.

Proposição 11.1. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X, sejam x, y e z elementos de X. Se $x \not\sim y$ e $y \sim z$, então $x \not\sim z$.*

`Demonstração`: O que queremos provar é equivalente à afirmação "se $y \sim z$ e $x \sim z$, então $x \sim y$". Esta afirmação é verdadeira, pois $\sim$ é reflexiva e transitiva. □

Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Para cada $x \in X$, definimos

$$[x] = \{y \in X; \, y \sim x\}$$

Um subconjunto da forma $[x]$ para algum $x \in X$ é chamado de *classe de equivalência*. O conjunto de todas as classes de equivalência se denota por $X/\!\sim$,

$$X/\!\sim \, = \{[x]; \, x \in X\},$$

e é chamado *quociente de X por $\sim$*

Proposição 11.2. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X, temos: $[x] = [y]$ se e somente se $x \sim y$.*

`Demonstração`: Suponha que $[x] = [y]$. Como $y \sim y$, temos $y \in [y]$. Como $[x] = [y]$, então $y \in [x]$, logo $y \sim x$, logo $x \sim y$.

Reciprocamente, suponha que $x \sim y$. Se $z \in [x]$, então $z \sim x$. Como $x \sim y$ e $\sim$ é transitiva, segue que $z \sim y$, ou seja, $z \in [y]$. Mostramos que $[x] \subseteq [y]$. Demonstra-se que $[y] \subseteq [x]$ da mesma maneira, trocando os papeis de x e y. □

Proposição 11.3. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X, uma e apenas uma das duas afirmações seguintes é satisfeita: (i) $[x] = [y]$, (ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

`Demonstração`: Queremos provar que, se $[x]$ e $[y]$ se interceptam, então $[x] = [y]$. Suponha que existe $z \in [x] \cap [y]$. Então $z \sim x$ e $z \sim y$. Logo $x \sim y$, pois $\sim$ é reflexiva e simétrica. Logo $[x] = [y]$, pela Proposição 11.2. □

Proposição 11.4. *Um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$ pode ser escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência.*

`Demonstração`: As classes de equivalência de $\sim$ são subconjuntos de X, logo

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X.$$

Todo elemento de z de X pertence à classe de equivalência $[z]$, pois $z \sim z$ (a relação é simétrica). Ou seja, se $z \in X$, então $z \in \bigcup_{x \in X} [x]$. Isto prova a igualdade

$$X = \bigcup_{x \in X} [x] \tag{31}$$

Além disso, segue da Proposição 11.3 que duas classes de equivalência distintas são disjuntas (não se interceptam). □

Exemplo

Sejam dados um conjunto $\mathcal{P}$ cujos elementos chamamos de pontos e um conjunto $\mathcal{L}$ cujos elementos chamamos de retas. Além disso, para simplificar a exposição, suponhamos que cada reta é um conjunto de pontos e que "um ponto P está em uma reta r" significa que o ponto pertence à reta, ou seja, $P \in r$. Suponhamos que os Axiomas de Incidência (I1), (I2) e (I3) sejam satisfeitos e ademais que, para todo ponto P que não esteja numa reta r, exista uma única reta s paralela a r passando por P (lembrando que duas retas são paralelas se não têm um ponto em comum).

Podemos resumir o parágrafo precedente dizendo que foi dada uma geometria de incidência satisfazendo o Quinto Postulado.

Definamos a seguinte relação no conjunto $\mathcal{L}$: $r \sim s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s.

Proposição 11.5. *A relação $\sim$ que acabamos de definir em $\mathcal{L}$ é uma relação de equivalência.*

`Demonstração`: É evidente que $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provemos que é também transitiva. Sejam r, s e t retas tais que $r \sim s$ e $s \sim t$. Queremos provar que $r \sim t$. Sem perda de generalidade, podemos supor que r, s e t são três retas distintas. Por absurdo, suponhamos r não seja paralela a t, isto é, suponhamos que exista um ponto P que está em r e em t. Como s é paralela a r e a t, P não está em s e existem duas paralelas a s que passam por P, o que contradiz a hipótese de que o Quinto Postulado é satisfeito para esse modelo. □

Vamos usar o modelo dado e a relação de equivalência $\sim$ para definir um novo modelo, chamado de *projetivização* do modelo dado. Nesse novo modelo, os pontos são os elementos da união disjunta

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P} \bigsqcup (\mathcal{L}/\sim),$$

isto é, há dois tipos de pontos na projetivização: os pontos do modelo original e as classes de equivalências de retas paralelas. Estas classes de equivalência são chamadas de *pontos no infinito*. As novas retas são os elementos da união disjunta

$$\mathcal{L}^* := \{r \sqcup [r];\, r \in \mathcal{L}\} \bigsqcup \{\mathcal{L}/\sim\},$$

isto é, uma reta antiga unida ao ponto no infinito por ela determinada será uma reta e, além dessas, o conjunto de todos os pontos no infinito também é uma reta.

Na projetivização do modelo dado, não existem retas paralelas. Cada reta do modelo antigo ganha um ponto no infinito. Duas retas que eram paralelas no modelo antigo passam a se encontrar no ponto no infinito que elas duas compartilham no modelo novo. Para que os axiomas da geometria de incidência sejam satisfeitos, foi preciso que chamássemos de reta também o conjunto de todos os pontos no infinito.

A demonstração, que omitimos aqui, de que a projetivização satisfaz os três axiomas de incidência pode ser encontrada na seção "Projective and Affine Planes" [2, Chapter 2]. A Figura 2.8 do Exemplo 7 de [2, Chapter 2] é uma interpretação geométrica da projetivização do plano usual da geometria euclideana.

Referências

[1] Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo. Editora da Unesp, 2009.
[2] M. J. Greenberg. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 3^a edição. W. H. Freeman, 2003.
[3] R. Hartshorne. Geometry: Euclid and Beyond. Springer, 1997.
[4] D. Hilbert. Foundations of Geometry, Second Edition. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971 (tradução do original em alemão Grundlagen der Geometrie, 1903).
[5] R. Millman & G. Parker. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.
[6] Edwin Moise. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.