MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2023, TURMA 42

Sumário

Introdução

Esta é uma versão modificada e estendida das notas de aula que escrevi para a Turma 42 da disciplina MAT0230 (Geometria e Desenho Geométrico I), ministrada no segundo semestre de 2022 para alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. A versão original continua disponível em https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2022/Notas22.pdf .

Nosso objetivo é a compreensão dos fundamentos da geometria euclideana numa linguagem contemporânea. Estamos interessados primordialmente no método axiomático, que consiste em enunciar claramente quais são as premissas e, a partir delas, dar demonstrações completas de todos os resultados da teoria. As civilizações islâmica e ocidental herdaram esse método de Euclides, que consolidou no tratado Os Elementos [1] boa parte da Matemática conhecida na civilização helenística no quarto século antes de Cristo.

Euclides principia sua obra enunciando certas "noções comuns" (regras lógicas de dedução) e seus cinco "postulados". Os quatro primeiros postulados podem ser encarados como simples verdades autoevidentes. Já o quinto, embora pareça correto, não é tão natural. Durante dois milênios, estudiosos tentaram demonstrar que o quinto postulado era supérfluo, que podia ser demonstrado a partir das verdades autoevidentes contidas nos quatro primeiros postulados e nas noções comuns. Foram dadas muitas "demonstrações" falaciosas, que na verdade continham alguma passagem em que se usavam, sutilmente, sem que se percebesse, consequências do quinto postulado. No século 19, a construção de modelos de "geometria não-euclideana", em que todos os postulados, menos o quinto, eram satisfeitos, mostrou de uma vez por todas que Euclides estava certo: é preciso se supor verdadeiro o quinto postulado para que seja possível demonstrar os resultados clássicos da geometria, como por exemplo os teoremas de Tales e de Pitágoras, conhecidos desde muito antes de Euclides.

A revolucionária descoberta das geometrias não-euclideanas evidenciou a necessidade de fundamentar a geometria em uma linguagem mais rigorosa do que a de Euclides. Para compreender, por exemplo, qual foi o erro de Legendre ao acreditar que tinha demonstrado o quinto postulado, era necessário explicitar os axiomas que Euclides tinha assumido apenas implicitamente e escrever demonstrações que pudessem ser verificadas usando apenas argumentos formais, sem o auxílio de figuras. No final do século 19, Pasch enunciou os hoje chamados de "axiomas de ordenamento" que estabelecem as regras que podem ser usadas ao se lidar com a noção de um ponto estar entre dois outros pontos, e que têm como consequências a separação de uma reta por um ponto em duas partes disjuntas, e a separação de um plano por uma reta em dois semiplanos. Em seus "Fundamentos da Geometria" [4], baseando-se mais imediatamente no trabalho de Pasch, e coroando um esforço de dois milênios de investigações, Hilbert propôs um conjunto de axiomas que completou a geometria de Euclides. Essa é talvez a segunda mais importante referência da Geometria, após os Elementos, naturalmente.

Nos anos 1930, Birkhoff propôs uma grande simplificação na teoria axiomática de Euclides-Hilbert. Ele partiu do princípio de que são conhecidos os números reais e suas propriedades e assumiu o "axioma da régua", que estabelece uma bijeção entre uma reta e o conjunto dos números reais. Daí as noções de congruência e de estar entre deixam de ser noções primitivas e tornam-se definições. E os postulados de Hilbert de ordenamento e congruência se tornam proposições, que podem ser demonstradas usando as propriedades dos números reais. A abordagem de Birkhoff é chamada de "geometria métrica", a de Hilbert, de "geometria sintética". O estudo da geometria sintética permite apreciar melhor a epopeia que começou com Euclides e culminou com a descoberta das geometrias não-euclideanas, e pode servir de porta de entrada para tópicos matemáticos mais avançados, em Lógica e em Álgebra, por exemplo. A geometria métrica é a que se ensina na Escola Básica, é a que se aplica em problemas de Física ou Engenharia. Por isso é discutível qual abordagem é a mais adequada para uma disciplina voltada para alunos de Licenciatura. Se, por um lado, estudar a geometria métrica os prepara melhor no conteúdo específico que vão ensinar, a abordagem sintética os coloca em contato com temas históricos importantes, que demonstram a importância que a Matemática teve no desenvolvimento da civilização como um todo.

Embora muitas vezes eu vá direto às fontes, que são os livros de Euclides e de Hilbert, eu me baseei principalmente em quatro textos didáticos mais modernos, especialmente em [2], do qual tomei emprestadas a nomenclatura, a notação, e a ordem dos assuntos. Também fui muito influenciado por [6], que faz um interessante paralelo entre a abordagem métrica e a sintética da geometria. Consultei bastante [3], cuja exposição é mais profunda e mais completa do que as de [2, 6], além de servir como um guia excelente para se ler Euclides a partir de um ponto de vista moderno. De [5], extraí a construção de dois modelos: o plano de Descartes e o plano de Poincaré. Estas notas são escritas com mais detalhes do que esses seis livros citados. Minha intenção foi tornar o assunto mais acessível para leitores menos experientes. Espero não ter exagerado a ponto de ter tornado cansativa a leitura.

Na Seção 1, enunciamos os cinco Postulados de Euclides e descrevemos o argumento usado por Legendre em sua tentativa de demonstrar o Quinto Postulado. Na Seção 2 iniciamos o estudo dos axiomas de Hilbert abordando inicialmente os "axiomas de incidência". Como nestas notas vamos tratar apenas da geometria plana, os axiomas de incidência resumem-se a três. O primeiro corresponde ao primeiro postulado de Euclides (dois pontos determinam uma única reta). Os dois seguintes foram assumidos apenas implicitamente por Euclides: existem pelo menos dois pontos em uma dada reta e existem pelo menos três pontos não-colineares. Na Seção 3, discutimos diversos modelos de "geometrias" que satisfazem os axiomas de incidências mas que com certeza não descrevem a "geometria do mundo real", que era aparentemente a intenção de Euclides.

1. Os Postulados de Euclides (para geometria plana)

O ponto de partida da geometria euclideana são os seguintes termos ou frases que aceitamos sem definição: (1) ponto, (2) reta, (3) congruência, (4) um ponto está em uma reta, (5) um ponto está entre dois pontos. Dizer que a reta r passa pelo ponto P é o mesmo que dizer que o ponto P está na reta r. Denotaremos congruência por $\cong$.

As noções de congruência, de "estar entre" e de "estar em" serão sujeitas a certos axiomas, oportunamente enunciados. Nos Elementos [1], os axiomas sobre a noção de estar entre e diversos axiomas sobre as noções de estar em e de congruência são assumidos apenas implicitamente. Alguns dos axiomas sobre congruência são incluídos por Euclides nas "noções comuns" que antecedem o enunciado da sua primeira proposição.

Postulado 1. *Dados* [1] *dois pontos P e Q, existe uma única reta que passa por P e Q. Essa reta é denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Claro que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 1.1. *Se o ponto C está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e é distinto de A e de B, então as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são iguais a $\overleftrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ passam por A e C. Pelo Postulado 1, existe uma única reta que passa por A e por C. Logo $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são a mesma reta. Trocando os pontos, o mesmo argumento garante que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são a mesma reta. □

Na Seção 4, vamos enunciar todos os axiomas sobre o "estar entre". Para enunciar os demais postulados de Euclides precisamos antecipar o seguinte axioma, que será posteriormente incluído no que chamaremos de "Axioma B1".

Postulado X. Se o ponto B está entre A e C, então B está na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Definição 1.1. *Dados dois pontos A e B, o segmento de extremidades A e B, que denotaremos por AB, é o conjunto de pontos que consiste de: A, B e de todos os pontos que estão entre A e B.*

Segue do Postulado X que todos os pontos de AB estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A formulação original [1] do segundo postulado de Euclides é "fique postulado prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta" (reta limitada é como Euclides chamava um segmento). Seguindo Greenberg [2], adotaremos aqui a seguinte interpretação do que Euclides queria dizer:

Postulado 2. *Dado o segmento AB, para todo segmento CD existe um ponto E tal que B está entre A e E e BE é congruente a CD.*

[1] Sempre que nos referirmos a dois pontos, ou duas coisas quaisquer, ficará implícito que os dois pontos, ou as duas coisas, são distintos.

Em outras palavras, todo segmento pode ser estendido indefinidamente, a partir de cada uma de suas extremidades.

Definição 1.2. *Dados dois pontos O e A, o círculo de centro O que passa por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$.*

O enunciado original do terceiro postulado de Euclides é: "fique postulado, com todo centro e distância, descrever um círculo" [1]. Para os padrões modernos de rigor, seria necessário antes definir distância. Mas, para isso, precisaríamos antes definir os números reais. Em vez disso, adotamos a seguinte formulação de [2] do terceiro postulado.

Postulado 3. *Dados dois pontos O e A, existe o círculo de centro O e raio OA.*

O Postulado 3 é consequência imediata dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Numa abordagem moderna, portanto, ele se torna supérfluo diante da Definição 1.2.

Os Postulados 1 e 3 podem ser reinterpretados como postulados do desenho geométrico. Chama-se de *régua euclideana* um instrumento ideal que permite obter a reta determinada por dois pontos; e de *compasso euclideano* o instrumento ideal que permite obter o círculo com centro em um ponto que passa por um segundo ponto dado. O Postulado 1 nos diz que é possível traçar, usando uma régua, a única reta que passa passa por dois pontos dados. O Postulado 3 nos diz que, dados dois pontos, usando um compasso, é possível traçar o círculo com centro em um dos pontos e passando pelo outro.

Definição 1.3. *Dados dois pontos A e B, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P. Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A.*

Só depois de enunciarmos os postulados da noção "estar entre" seremos capazes de provar a seguinte proposição: "se C é distinto de A e pertence a $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$".

Definição 1.4. *As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais.*

Definição 1.5. *Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas não opostas que se originam em A. As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.6. *Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.*

Definição 1.7. *Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

É importante frisar que os dois ângulos retos do enunciado do Postulado 4 não são necessariamente suplementares. Um deles pode estar aqui do nosso lado e o outro em outra galáxia. Num certo sentido, este postulado reflete a homogeneidade do espaço.

Na geometria métrica de Birkoff [6], que é a abordagem da geometria euclideana adotada em todos os livros de geometria para o Ensino Médio ou Fundamental, postula-se que todo ângulo possui uma medida, e define-se que dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida e que um ângulo é reto se mede 90 graus. Nessa abordagem, o Postulado 4 é uma proposição trivial. Antes de Birkoff, sem usar números reais, Hilbert explicitou diversos postulados ou resultados implicitamente assumidos por Euclides (sobre congruência de ângulos, sobre a propriedade da reta separar um plano em dois semiplanos, etc) e, usando-os, demonstrou ([4, Teorema 21], ver também [6, Theorem 8.2.3]) o Postulado 4; ou seja, mostrou que ele é um postulado supérfluo também na *geometria sintética*. Hilbert atribui o resultado a Proclus, matemático e filósofo que viveu no século V.

Definição 1.8. *Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s.*

Na geometria espacial, exige-se também que duas retas paralelas sejam coplanares, mas estas notas tratam apenas da geometria plana.

Postulado 5. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta paralela a r que passa por P.*

A formulação original do Quinto Postulado é: "fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos". Em outras palavras, suponha que sejam dadas três retas r, s e t, que t intersecta r e s, e que, em um dos lados de t a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Então r e s se encontram no lado de t em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Para formular seu postulado nesses termos, Euclides assumiu implicitamente diversos postulados sobre congruência de ângulos e sobre os dois lados que uma reta define no plano. Oportunamente, explicitaremos todos esses postulados implícitos e mostraremos que a formulação original e este enunciado do Postulado 5 que adotamos aqui são equivalentes.

O matemático francês Adrien Marie Legendre, que viveu de 1752 a 1833 e deu importantes contribuições à Mecânica e à Geometria, acreditou que tinha demonstrado o Quinto Postulado. Vamos listar em seguida os passos de uma de suas "demonstrações", sendo dadas a reta r e um ponto P que não está em r. A figura quase indispensável para acompanhar o argumento será omitida neste documento. A leitora pode pegar papel e caneta e desenhar sua própria figura, ou pode consultar a Figura 1.12 de [2].

(1) Seja Q o ponto em r tal que $\overleftrightarrow{PQ}$ e r sejam perpendiculares.
(2) Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$. Então s é paralela a r.
(3) Seja t uma reta que passa por P e é diferente de s. Queremos provar que t e r se interceptam.
(4) Seja R um ponto que está em t e está no mesmo lado de s que r.
(5) Seja R' um ponto do lado oposto ao de R relativamente à reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que $\angle QPR \simeq \angle QPR'$.
(6) O ponto Q está no interior do ângulo $\angle RPR'$, logo a reta r, que passa por Q, intesecta um dos lados desse ângulo, $\overrightarrow{PR}$ ou $\overrightarrow{PR'}$.
(7) Se a reta r intersecta $\overrightarrow{PR}$, está provado o que queríamos, pois P e R são pontos de t.
(8) Suponha que r intersecta $\overrightarrow{PR'}$ e chame sua interseção de A. Tome B pertencente a $\overrightarrow{PR}$ tal que $PA \simeq PB$.
(9) Pelo criério LAL de congruência de triângulos, $\Delta PQA \simeq \Delta PQB$. Logo $\angle PQA$ é congruente a $\angle PQB$.
(10) O ângulo $\angle PQA$ é reto, porque as retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$ são perpendiculares.
(11) Logo $\angle PQB$ também é reto e portanto as semirretas $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ são opostas.
(12) Como Q e A estão em r, B também está em r e é portanto o ponto de encontro das retas r e t.

Temos um desafio bastante complexo pela frente: justificar os passos corretos desta sucessão de argumentos, e detectar a passagem em que Legendre usou sem perceber um fato que só possa ser demonstrado supondo válido o Quinto Postulado, o que torna este um argumento inválido por ser circular. Vamos revisitar esta "demonstração errada" quando a teoria, que começaremos a desenvolver sistematicamente na próxima seção, estiver suficientemente desenvolvida.

2. Axiomas de Incidência

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência plana: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r, (2) os pontos $P, Q, R, \cdots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \cdots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes. Às vezes diremos também que o ponto P "pertence" à reta r se P está em r, mas não usaremos o símbolo de pertencimento $\in$ da teoria dos conjuntos, pois uma reta não necessariamente consiste de um conjunto de pontos. Essa afirmação deve ficar mais clara na Seção 3.

São três os axiomas da Geometria de Incidência:

(I1) Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r que passa por P e por Q.
(I2) Dada uma reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r.
(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

A reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. *O ponto R, distinto de P, está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.*

`Demonstração`: Se o ponto R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então a única reta determinada por P e R é $\overleftrightarrow{PQ}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PQ}$.

Por definição, R é um ponto de $\overleftrightarrow{PR}$. Logo, se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, então R é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

Proposição 2.2. *Dadas duas retas concorrentes r e s, existe apenas um ponto P que está nas duas.*

`Demonstração`: Se existissem dois pontos P e Q ambos pertencentes às retas r e s, pela unicidade postulada no Axioma I1, r e s seriam a mesma reta. Mas, por hipótese, elas são duas retas. $\square$

Proposição 2.3. *Existem (pelo menos) três retas não-concorrentes.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Afirmo que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são distintas e não-colineares. De fato, são três retas distintas porque se duas delas fossem iguais, os três pontos seriam colineares (Proposição 2.1). E, pela Proposição 2.2, B é o único ponto que pertence simultaneamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, se as três retas fossem concorrentes, B pertenceria a $\overleftrightarrow{AC}$, contradizendo o fato de que A, B e C não são colineares. $\square$

Proposição 2.4. *Dada uma reta r, existe pelo menos um ponto P que não está em r.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Pelo menos um dos três pontos não está em r, caso contrário, os três pontos seriam colineares. $\square$

Proposição 2.5. *Dado um ponto P, existe pelo menos uma reta que não passa por P.*

`Demonstração`: Se todas as retas passassem por P, não existiriam três retas não-concorrentes, contrariando a Proposição 2.3. $\square$

Proposição 2.6. *Dado um ponto P, existem pelo menos duas retas que passam por P.*

Problema 2.1. Demonstre a Proposição 2.6.

3. Modelos

Dado um sistema axiomático, tal como a Geometria de Incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*. Os axiomas da geometria de incidência são tão frouxos que permitem a existência de modelos completamente diferentes entre si, como veremos a seguir. Em todos os exemplos, usaremos teoria dos conjuntos. Em dois deles, usaremos os números reais.

As proposições que se demonstrem usando apenas os axiomas (I1), (I2) e (I3) e suas consequências são automaticamente válidas em qualquer modelo da Geometria de Incidência.

O Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} \coloneqq \{(x,y);\, ax+by=c\}, \quad a,b,c \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposições 3.1 e 3.2 expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A=(0,0)$, $B=(1,0)$ e $C=(0,1)$ não são colineares pois $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y=0$, que não passa pelo ponto C; ou seja, também o Axioma I3 é satisfeito. Tudo junto, isso mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência (leia mais sobre isso em [5, Section 2.1] e [6, Chapter 2]).

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1,y_1) e (x_2,y_2).*

`Demonstração`: Dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$, é imediato verificar que as equações equivalentes

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \iff (y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1 \tag{1}$$

são satisfeitas pelos dois pontos dados. O par de coeficientes (y_2-y_1, x_1-x_2) é diferente de $(0,0)$ porque os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são distintos. Logo $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados. Isto prova a existência.

Suponha que $ax+by=c$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados, (x_1,y_1) e (x_2,y_2). Substituindo as coordenadas dos dois pontos na equação e subtraindo as duas equações assim obtidas, obtemos

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0. \tag{2}$$

Se $x_1=x_2$ e $y_2 \neq y_1$, segue de (2) que $b=0$ e, então, pois $(a,b)\neq(0,0)$, que $a \neq 0$. A equação $ax+by=c$ se reduz portanto a $ax=c$ ou, equivalentemente, $x=\frac{c}{a}$. Como essa reta passa por (x_1,y_1), segue que $\frac{c}{a}=x_1$ e portanto a equação pode ser reescrita como $x=x_1$, que é o que se obtém fazendo $x_1=x_2$ em (1) e cancelando (y_2-y_1), que é diferente de zero. O mesmo argumento, trocando as letras, também mostra que, se $x_1 \neq x_2$ e $y_2=y_1$, então a equação (2) se reduz a $y=y_1$, que é o que se obtém em (1) fazendo $x_1=x_2$, tendo $y_1 \neq y_2$. Resta considerar o caso em que x_2-x_1 e y_2-y_1 são não nulos (o caso em que ambos são nulos não ocorre porque os pontos são distintos). Segue de (2) e de $(a,b)\neq(0,0)$ que a e b são diferentes de zero e que $b=a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$. Substituindo esta igualdade em $ax+by=c$, vem

$$ax+a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y=c.$$

Como o ponto (x_1,y_1) satisfaz esta equação, vem

$$ax_1+a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y_1=c.$$

Igualando os dois primeiros membros das duas últimas equações e cancelando o a, vem

$$x+\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y=x_1+\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y_1,$$

que é equivalente à segunda das duas equações equivalentes em (1).

Separando em três casos, acabamos de provar que, dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), se L é uma reta que passa por ambos os pontos, então L é a reta de equação $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1$. Ou seja, provamos a unicidade. □

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

`Demonstração`: Seja r a reta de equação $ax+by=c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

Caso 1. Se $a\neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0,\frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a},0)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 2. Se $a \neq 0$ e $b=0$, então $(\frac{c}{a},0)$ e $(\frac{c}{a},1)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 3. Se $a=0$ e $b\neq 0$, então $(0,\frac{b}{a})$ e $(1,\frac{b}{a})$ são dois pontos distintos de r. □

O Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a, $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por

$$L_a := \{(x, y) \in P;\, x = a\}, \quad L_{a,r} := \{(x, y) \in P;\, (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Veriquemos que os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré. Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em P. Dois casos devem ser considerados: (1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, a reta L_c, $c = x_1 = x_2$, passa por (x_1, y_1) e por (x_2, y_2). Nenhuma reta L_b, com $b \neq c$ passa por (c, y_1) ou (c, y_2). Quaisquer dois pontos numa reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, possuem abscissas distintas. Logo L_c é a única reta passando por (c, x_1) e (c, x_2). No segundo caso, por terem abscissas distintas, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não podem estar em uma mesma reta L_a, $a \in \mathbb{R}$. E eles estão em uma reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se e somente se o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2 \end{array} \right. \tag{3}$$

é satisfeito. Suponha que vale (3). Comparando as duas equações, concluímos que vale também

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2 \tag{4}$$

Daí segue que $x_1^2 - 2ax_1 + y_1^2 = x_2^2 - 2ax_2 + y_2^2$ e, daí,

$$a = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}. \tag{5}$$

Combinada à primeira das equações em (3), (5) implica que

$$r = \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}\right]^2 + y_1^2}. \tag{6}$$

Mostramos que (3) implica (5) e (6). Ou seja, provamos que se existir uma reta do tipo $L_{a,r}$ passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2), então a e r necessariamente serão dados por (5) e (6).

Ou seja, provamos a unicidade de (I1). Para provar a existência, devemos verificar que (5) e (6) implicam (3). Espero que esteja visível para os leitores que (5) e (6) implicam a primeira das equações em (3). Por outro lado, (5) implica (4) (os cálculos que mostraram que (4)$\Longrightarrow$(5) mostram também que (5)$\Longrightarrow$(4)). A equação (4), combinada à primeira das equações em (3), implica a segunda das equações em (3). Isto conclui a demonstração de que o Axioma I1 é satisfeito nesta interpretação da Geometria de Incidência.

Para provar que o Axioma I2 é satisfeito para esta interpretação, de novo é preciso separar em dois casos. Dada uma reta do tipo L_a, $a \in \mathbb{R}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, (a, t), $t > 0$. Dada uma reta do tipo $L_{a,r}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, $(t, \sqrt{r^2 - t^2})$, $-r < t - a < r$. Logo toda reta possui pelo menos dois pontos.

A única reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$ é L_0. Considere o ponto $C = (1, 1)$. Se A, B e C estivessem em uma mesma reta, pela unicidade de (I1) aplicado aos pontos A e B, essa reta seria a reta $\overleftrightarrow{AB} = L_0$ e portanto C pertenceria a L_0. Mas C não pertence a L_0, pois sua abscissa é diferente de 0. Logo A, B e C não são colineares. Logo axioma (I3) é satisfeito.

Geometrias finitas.

O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de "geometria de n pontos" o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 3.1. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas, (b) na geometria de quatro pontos, o Quinto Postulado de Euclides é satisfeito, (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas paralelas a r passando por P.

`O Plano de Fano`. Os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$. As retas são os seguintes subconjuntos de três pontos de S:

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. Este é o Exemplo 6 de [2, Chapter 2], veja lá uma figura ilustrativa. Você pode ler sobre isso também no verbete "Fano plane" da Wikipedia em inglês ou no verbete "Plano de Fano" da Wikipedia em espanhol. O Plano de Fano é um modelo da geometria de incidência em que todas as retas se encontram, cada reta passa por três pontos e por cada ponto passam três retas.

`A geometria dual da geometria de três pontos`. As retas são os elementos do conjunto de três elementos $S := \{A, B, C\}$. Os pontos são os subconjuntos de dois elementos de S. Um ponto P está na reta r se $r \in P$.

A esfera de Riemann.

Os pontos são os elementos de uma esfera, as retas são os *círculos máximos*, ou seja, círculos contidos na esfera e com centro igual ao centro da esfera. Não existem retas paralelas. Esta interpretação não é um modelo da geometria de incidência, pois existem infinitas retas passando dois pontos antipodais dados. Uma maneira de transformar essa interpretação imperfeita em um modelo da geometria de incidência é chamar de pontos os elementos do quociente da esfera pela relação de equivalência que identifica antípodas. As retas são as imagens dos círculos máximos no quociente.

Planos projetivos. Uma explicação mais detalhada, mas ainda incompleta, dos resultados enunciados nesta subseção, é dada ao final do Apêndice (Seção 5).

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides: dados uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r. Sejam r, s e t três retas em P tais que r é paralela a s e s é paralela a t. Então r é paralela a t.*

`Demonstração`: Suponha que r não é paralela a t e seja P o ponto que está em r e em t. Então r e t são duas paralelas a s passando por P, o que contradiz o Quinto Postulado. □

Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides, sejam r e s retas em $\mathcal{P}$ (não-necessariamente distintas). Definimos: $r \equiv s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s. Segue da Proposição 3.3 que $\equiv$ é uma relação de equivalência. Como é de costume, para cada reta r de $\mathcal{P}$, denotamos

$$[r] \;=\; \{s;\, s \text{ é reta de } \mathcal{P} \text{ e } s \equiv r\}$$

Seja $\mathcal{P}^*$ a união disjunta

$$\mathcal{P}^* \;:=\; \{P;\, P \text{ é ponto de } \mathcal{P}\} \;\cup\; \{[r];\, r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$$

O *plano projetivo* definido por $\mathcal{P}$ é o seguinte modelo da geometria de incidência. Os pontos são os elementos de $\mathcal{P}^*$. Para cada reta r de $\mathcal{P}$, o subconjunto de $\mathcal{P}^*$ da forma $\{P;\, P \text{ está em } r\} \cup \{[r]\}$ é uma reta. Além destas, que podem ser imaginadas como sendo uma reta de $\mathcal{P}$ acrescida de um *ponto no infinito*, também declaramos que o conjunto $\{[r];\, r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$ é uma reta desse novo modelo. Duas retas sempre se intesectam neste modelo. Dizemos que $\mathcal{P}^*$ é o completamento projetivo de $\mathcal{P}$. Pedindo uma licença poética, diremos que duas retas paralelas de $\mathcal{P}$ agora se encontram no infinito.

O Plano de Fano, acima definido, é o completamento projetivo do modelo mais simples de geometria de incidência que satisfaz o Quinto Postulado, a geometria de quatro pontos, também descrita acima. Para uma interpretação geométrica do completamento projetivo do Plano de Euclides (ou de Descartes), veja [2, Exemplo 2.7, Figura 2.8].

4. Axiomas de Ordenamento

Nesta seção, acrescentamos à formulação axiomática da Geometria iniciada na Seção 2 o termo primitivo "estar entre", enunciamos os axiomas [2] satisfeitos por esse novo termo primitivo e exploramos algumas de suas consequências.

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação "B está entre A e C". São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

(B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
(B2) Dados dois pontos B e D, existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
(B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Dados dois pontos A e B, denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.3). Podemos escrever

$$AB := \{A, B\} \cup \{P;\ A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P;\ A * B * P\} \tag{7}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\{\overleftrightarrow{AB}\} := \{P;\ P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B, temos $AB = BA$.*

`Demonstração`: Os pontos extremos dos dois segmentos são os mesmos, logo basta provar que, dado um ponto P, $A * P * B \iff B * P * A$. Mas isto é consequência imediata do item (ii) do axioma (B1). □

Proposição 4.2. *Seja r uma reta, seja O um ponto em r, seja A um ponto que não está em r. Se $A * O * B$ ou se $A * B * O$, então B não está em r.*

`Demonstração`: Em qualquer dos dois casos, $A * O * B$ ou $A * B * O$, segue do Axioma B1 que O está em $\overleftrightarrow{AB}$. Se B estivesse em r, r e $\overleftrightarrow{AB}$ teriam dois pontos em comum, O e B; logo seriam iguais, pela unicidade postulada no Axioma I1; logo A estaria em r, contrariando a hipótese. Logo B não está em r. □

Proposição 4.3. *Sejam Q, A e B pontos colineares, com $A \neq B$. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: Segue de (7) que Q pertence a $\overrightarrow{AB}$ se e somente se uma das seguintes afirmações são verdadeiras: (i) $Q = A$, (ii) $Q = B$, (iii) $A * Q * B$, ou (iv) $A * B * Q$. Equivalentemente, $Q \notin \overrightarrow{AB}$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas. Queremos portanto provar que $Q * A * B$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas.

Se $Q * A * B$, temos: (v) $Q \neq A$ e $Q \neq B$, pelo Axioma B1, e (vi) $A * Q * B$ não ocorre, nem $A * B * Q$, pelo Axioma B3. Logo são falsas as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv).

Reciprocamente, suponhamos que (i), (ii), (iii) e (iv) sejam afirmações falsas. Sendo falsas (iii) e (iv), segue do Axioma B3 e da colinearidade dos três pontos que $Q * A * B$. □

Proposição 4.4. *Dados dois pontos A e B, temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

`Demonstração`: Segue de (7) que $AB \subset \overrightarrow{AB}$. Segue de (7) e da Proposição 4.1 que $AB = BA \subset \overrightarrow{BA}$. Logo $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

[2] David Hilbert [4] chamou de *Axiome der Anordnung* os axiomas satisfeitos pela noção de "estar entre". Em inglês, em particular nas referências [2, 5, 6] nas quais se baseiam estas notas, usa-se o substantivo abstrato "betweenness" para se referir a essa noção.

Suponha que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Queremos provar que $Q \in AB$. Vamos dividir em casos. Se $Q = A$ ou $Q = B$, então segue da definição de segmento que $Q \in AB$. Se Q é diferente de A e diferente de B, então, como todos os pontos das duas semirretas são pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos A, B e Q são colineares, e podemos portanto invocar o axioma (B3) para concluir que uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:

(i) $Q * A * B$,
(ii) $A * Q * B$,
(iii) $A * B * Q$.

Se ocorrer (i), segue da Proposição 4.3 que $Q \notin \overrightarrow{AB}$, o que é falso, pois estamos supondo que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se ocorrer (iii), então $Q * B * A$, pelo axioma (B1). Daí, pela Proposição 4.3, $Q \notin \overrightarrow{BA}$, o que é falso. Logo, se valer $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, então não vale (i), nem vale (iii). Logo vale (ii), o que implica que $Q \in AB$. $\square$

Problema 4.1. Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P;\ P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Cabe aqui um comentário sobre nomenclatura. Adotamos os termos de [2] para a geometria de incidência, nosso ponto de partida para a axiomática completa da geometria euclideana. Para nós, portanto, existe um conjunto de pontos e um conjunto de retas, mas as retas não são necessariamente conjuntos de pontos (veja, por exemplo, a geometria dual da geometria de três pontos, na página 9). É por isso que é preciso considerar a expressão "um ponto está em uma reta" como um termo primitivo, sem definição. Além disso o conjunto de todos os pontos que estão em uma reta não é, em geral, "igual" à reta, pois podem ser objetos de natureza diferente. Em algum modelo (em todos os modelos mencionados nestas notas, exceto o da geometria dual) pode acontecer de r ser igual a $\{P; , P \in r\}$, mas ao tratar da teoria axiomática abstrata, devemos fazer a distinção. Já no texto [3], convenciona-se explicitamente que cada reta é um subconjunto do conjunto de todos os pontos, e "está em" é o "pertence" da teoria dos conjuntos. Hilbert [4] é ambíguo a esse respeito, e o livro dele pode ser lido com uma ou outra convenção.

Dizemos que um segmento AB e uma reta r se interceptam se existe pelo menos um ponto pertencente a AB que também está em r. Isso não exclui a possibilidade de todos os pontos de AB estarem em r, ou que o ponto de interseção seja uma das extremidades do segmento. Vamos reservar a palavra "atravessar" para um tipo mais específico de interseção:

Definição 4.1. Diremos que o segmento AB atravessa a reta r ou, equivalentemente, que r atravessa AB se r e AB se interceptam em apenas um ponto, diferente de A e de B. Em outras palavras, r e AB se atravessam se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r são distintas e concorrentes e se o ponto P de interseção das duas retas satisfaz $A * P * B$.

. Enunciamos agora nosso quarto axioma de ordenamento, conhecido como o "Postulado de Pasch" [4].

(B4) Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos não-colineares que não estão em r. Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Definição 4.2. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A, B e C, denotado por ΔABC, é a união dos segmentos AB, BC e AC, que são chamados de lados do triângulo.*

Proposição 4.5. *Suponha que a reta r intercepta o lado AB do triângulo ΔABC, $r \neq \overleftrightarrow{AB}$. Então r intercepta pelo menos um dos outros dois lados do triângulo. Só intercepta os outros dois lados se C estiver em r.*

`Demonstração`: No caso em que r não passa por A, B, nem C, esta proposição diz exatamente o que diz o Axioma B4. Nos casos em que r passa por um ou dois dos vértices, as afirmações que queremos demonstrar são consequências imediatas da definição de lado de um triângulo e do fato de que os vértices de um triângulo não são colineares. $\square$

Separação do plano.

Dizemos que um conjunto S de pontos é *convexo* se, dados quaisquer dois pontos A e B em S, o segmento AB está todo contido em S. O objetivo desta subseção é mostrar que o conjunto dos pontos que não estão em uma reta é a união disjunta de dois subconjuntos convexos, chamados de “semiplanos” (veja o Problema 4.6).

Definição 4.3. *Dada uma reta r e um ponto A que não está em r, o* semiplano *limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A := \{A\} \cup \{C;\ C$ não está em r, $C \neq A$ e r não atravessa $AC\}$.*

O principal resultado desta subseção é o teorema seguinte, que se trata essencialmente de uma versão traduzida e ligeiramente reformulada de [3, Proposition 7.1]

Teorema 4.6. *Toda reta r limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.*

`Demonstração`: Seja X o conjunto dos pontos que não estão em r. Dados A e B em X, diremos que $A \sim B$ se $A \in H_B$.

Por definição, temos que $A \in H_A$. Se $A \in H_B$ e $A \neq B$, então r não atravessa AB, que é igual BA, pela Proposição 4.4; logo r não atravessa BA, logo $B \in H_A$. Isto prova que a relação $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provaremos em seguida que ela também é transitiva.

Suponhamos que $A \sim B$ e $B \sim C$. Queremos provar que $A \sim C$. Claro que podemos supor que os pontos A, B e C são distintos, caso contrário não haveria o que provar. Vamos precisar separar em dois casos: ou esses três pontos são colineares, ou não são.

Suponhamos primeiramente que eles não são colineares. Temos que r não atravessa AB, nem atravessa BC (é isso o que significa $A \sim B$ e $B \sim C$). Se r atravessasse AC, seguiria, pelo Axioma B4, que r atravessaria AB ou BC, o que é falso. Logo r não atravesa AC, ou seja $A \sim C$.

Suponhamos agora que A, B e C são colineares e chamemos de s a reta que os contém. Por definição de X, cada um dos três pontos A, B e C não está em r, logo r e s são duas retas distintas. Pelo Axioma I2, r possui pelo menos dois pontos. Pelo menos um deles não está em s, caso contrário a unicidade do Axioma I1 implicaria que r seria igual a s. Seja portanto D um ponto de r que não está em s. Pelo Axioma B2, existe um ponto E tal que $E * A * D$. O ponto E não está em r, pela Proposição 4.2. Temos que $A \sim E$ pois, se existisse um ponto P tal que $E * P * A$, esse ponto seria o único (veja a Proposição 2.2) ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e s, ou seja, P seria igual a D, logo teríamos $E * D * A$ e $E * A * D$, o que não pode acontecer, pelo Axioma B3. O ponto E também não está em s, de novo pela Proposição 4.2, pois $E * A * D$. Então temos $E \sim A$, $A \sim B$ e os três pontos E, A e B são não colineares. Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim B$. Logo temos $E \sim B$ e $B \sim C$, sendo E, B e C não-colineares (pois E não está em s, que é igual a $\overleftrightarrow{BC}$). Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim C$. Logo temos $C \sim E$ e $E \sim A$, sendo C, E e A não colineares, logo (usando pela terceira vez o mesmo argumento) $C \sim A$, ou seja, $A \sim C$, como queríamos.

Provamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em X. Por definição, os semiplanos determinados por r são as classes de equivalência de associadas a esta relação de equivalência. Queremos provar que o conjunto das classes das equivalência $X/\sim$ possui exatamente dois elementos.

O conjunto X é não vazio, pela Proposição 2.4. Logo $X/\sim$ é não vazio. Seja A um elemento de X. Pelo Axioma I2, segue que existe um ponto O que está em r. Pelo Axioma B2, existe um ponto B tal que $A * O * B$. O ponto B não está em r, pela Proposição 4.2. Logo A e B são dois pontos de X. A reta r atravessa AB, pois o ponto O está em r e pertence a AB. Ou seja, $A \notin H_B$; ou seja, A e B pertencem a classes de equivalência distintas. Provamos que $X/\sim$ possui pelo menos dois elementos.

Para concluir a demonstração, devemos provar que, dados três pontos que não estão em r, pelo menos um par deles pertence a um mesmo semiplano. Tomemos arbitrariamente três pontos A, B e C de X. Basta provar, sem perda de generalidade, que, se r atravessar AB e AC, então r não atravessará BC. Isto segue do “apenas um" do Axioma B4, caso A, B e C não sejam colineares. Suponhamos agora que A, B e C sejam colineares. Vamos precisar usar de novo a construção que fizemos para provar a transitividade, mas agora o argumento é mais fácil porque já sabemos que $\sim$ é transitiva. Seja D um ponto que está em r, mas não está na reta s que contém os pontos A, B e C, seja E tal que $E * A * D$. Provamos acima que $A \sim E$ e que os pontos B, C e E são não-colineares. Como estamos supondo que $A \not\sim C$ e $A \not\sim B$, segue da transitividade de $\sim$ que $C \not\sim E$ e $B \not\sim E$. Temos portanto três pontos não colineares B, C e E tais que r atravessa BE e CE. Segue do Axioma B4 que r não atravessa BC. □

Dada uma reta r, os dois semiplanos determinados por r serão também chamados de *lados* de r. Diremos que dois pontos A e B estão *do mesmo lado* de r se $A \in H_B$ e diremos que A e B estão *em lados opostos* de r se $A \notin H_B$.

Proposição 4.7. *Sejam A, B e C três pontos que não estão na reta r. São verdadeiras as seguintes afirmações.*

(1) *Se A e B estão do mesmo lado de r, se B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*
(2) *Se A e B estão em lados opostos de r, se B e C estão em lados opostos de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*
(3) *Se A e B estão em lados oposto de r, se B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão em lados opostos de r.*

`Demonstração`: Vimos na demonstração do Teorema 4.6 que a relação definida pela sentença "$A \sim B \iff A \in H_B$" é uma relação de equivalência no conjunto X dos pontos que não estão em r, e que a classe de equivalência de um ponto $A \in X$ é igual a H_A.

Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então $A \in H_B$ e $B \in H_C$. Logo, $A \in H_C$, pela transitividade de $\sim$. Logo A e C estão do mesmo lado de r, o que prova (1).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão em lados opostos de r, então $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$. Vimos na demonstração do Teorema 4.6 que $\sim$ possui duas, e só duas, classes de equivalência. Segue da hipótese da afirmação (2) que A e C não pertencem à classe de equivalência que contém B, logo A e C pertencem à outra classe de equivalência, distinta de H_B. Logo, $A \sim C$; ou seja, $A \in H_C$; ou seja, A e C estão do mesmo lado de r. Provamos (2).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão do mesmo lado de r, então $A \not\sim B$ e $C \sim B$. Segue então que $A \not\sim C$ (veja a Proposição 5.1). Logo A e C estão em lados opostos de r, o que conclui a demonstração. □

Cabe aqui um comentário sobre as diferentes abordagens adotadas pelos livros da nossa bibliografia.

Em vez de fazer como Hilbert [4] e Hartshorne [3] que adotam o Postulado de Pasch como o quarto axioma de ordenamento, Greenberg [2] convenciona, sem a princípio definir o que é o lado de uma reta, que a frase "A e B estão do mesmo lado de uma reta r" significa que ou os pontos A e B são iguais e não estão em r, ou os pontos A e B são distintos, não estão em r, e r atravessa AB. E convenciona que a frase "A e B estão em lados opostos de r" significa que A e B não estão em r e r atravesa AB. Daí ele adota como quarto axioma de ordenamento que as afirmações (1) e (2) da Proposição 4.7 são sempre válidas, dados A e B fora de r. Com estas convenções, a afirmação (3) é uma consequência lógica imediata de (1) e (2).

Quase todo o trabalho que fizemos nesta subseção é, essencialmente, a demonstração de que o Postulado de Pasch (nosso Axioma B4) implica que o quarto axioma de ordenamento de Greenberg é verdadeiro. A recíproca também é verdadeira, e é bem mais fácil de provar: o "B4 do Greenberg" implica o nosso Axioma B4, que é chamado então de Teorema de Pasch em [2, 6]. A grande vantagem da abordagem de Greenberg é que fica mais rápido provar a Separação do Plano. Uma desvantagem é ter de lidar com definições para o significado das frases "A e B estão do mesmo lado de r" e "A e B estão em lados opostos de r" sem definir antes o que são "lados" de uma reta (isto não está errado, mas é um pouco incômodo). A maior desvantagem talvez seja (esta é uma afirmação bastante subjetiva) que o Postulado de Pasch parece muito mais natural, pode ser facilmente visualizado com uma figura, do que o "B4 do Greenberg", que pode soar como uma afirmação excessivamente formal.

Ordenamento de quatro pontos.

Nesta subseção, vamos usar que cada reta divide o plano em dois semiplanos para compreender como se pode ordenar mais de três pontos na reta.

Proposição 4.8. *Se $A*B*C$ e $A*C*D$, então vale $B*C*D$ e $A*B*D$.*

`Demonstração`: Segue das hipóteses e do Axioma (B1) que A, B e C são três pontos distintos e que também A, C e D são três pontos distintos, ou seja, temos que

$$A \neq B, \quad A \neq C, \quad A \neq D, \quad B \neq C \;\text{ e }\; C \neq D.$$

Também vale que $B \neq D$ pois, se B fosse igual a D, teríamos $A*B*C$ e $A*C*B$, o que violaria o Axioma B3. Logo os pontos dados são quatro pontos distintos. Seja r a reta determinada por A e C, $r = \overleftrightarrow{AC}$. Segue do Axioma B1 que B e D estão em r, ou seja, os quatro pontos são colineares.

Pela Proposição 2.4, existe um ponto E que não está em r. Denotemos por s a reta determinada por E e C, $s = \overleftrightarrow{EC}$. Pela Proposição 2.2, C é o único ponto que está simultaneamente em r e em s.

Segue da hipótese $A*C*D$ que A e D estão em lados opostos de s. Provemos agora que A e B estão do mesmo lado de s: se A e B estivessem em lados opostos de s, existiria um ponto X em s tal que $A*X*B$, X estaria em r pois é um ponto do segmento AB e A e B estão em r, logo X seria igual a C, mas então teríamos $A*C*B$ e $A*B*C$, o que violaria o Axioma B3.

Vimos portanto que A e D estão em lados opostos de s e A e B estão do mesmo lado de s. Segue da Proposição 4.7 que B e D estão em lados opostos de s. Logo existe Y em s tal que $B*Y*D$. Mas $B*Y*D$ implica que Y está na reta r (Axioma (B1)). Logo Y é o único ponto de interseção de r e s, $Y = C$. Logo $B*C*D$.

A prova de que vale $A*B*D$ é análoga e será apenas esboçada. Sejam r e E como na primeira parte demonstração. Façamos $t := \overleftrightarrow{EB}$. Então A e C estão em lados opostos de t e C e D estão do mesmo lado de t. Logo A e D estão em lados opostos de t. O ponto de interseção do segmento AD com a reta t tem de ser igual a B, pois ele é a interseção das retas r e t. Logo $A*B*D$. □

O argumento que usamos duas vezes na demonstração da Proposição 4.8 pode ser usado mais duas vezes para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 4.9. *Se $A*B*C$ e $B*C*D$, então vale $A*B*D$ e $A*C*D$.*

`Demonstração`: Seja r a reta que passa pelo quatro pontos dados, seja E um ponto que não está em r, seja s a reta que passa por E e C, seja t a reta que passa por E e B. Então B e D estão em lados opostos de s, A e B estão do mesmo lado de s, logo A e D estão em lados opostos de s e portanto $A*C*D$. Além disso, A e C estão em lados opostos de t, C e D estão do mesmo lado de t, logo A e D estão em lados opostos de t e portanto $A*B*D$. □.

Definição 4.4. *Dizemos que $A*B*C*D$ se valem as quatro seguintes afirmações: $A*B*C$, $A*B*D$, $A*C*D$ e $B*C*D$.*

Os enunciados das Proposições 4.8 e 4.9 podem ser resumidos esquematicamente como:

$$(A*B*C \;\wedge\; A*C*D) \;\vee\; (A*B*C \;\wedge\; B*C*D) \implies A*B*C*D \tag{8}$$

(o símbolos $\wedge$ e $\vee$ denotam "e" e "ou", respectivamente).

Problema 4.2. Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$.

Problema 4.3. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
`Sugestão: Use as Proposições 4.3, 4.8 e 4.9.`

Problema 4.4. Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC.

Problema 4.5. [`Pasch para pontos colineares`] Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos colineares que não estão em r. Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Problema 4.6. [`Os semiplanos são conjuntos convexos.`] Seja H um semiplano delimitado pela reta r. Mostre que, se $A, B \in H$ e Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos não-colineares que não estão em r. Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.$A * P * B$, então $P \in H$.

Separação da reta.

Combinando as Proposições 4.3 e 4.8, obteremos agora (compare com o Problema 4.1):

Proposição 4.10. *Suponha que $C * A * B$ e seja r a reta que passa por A, B e C. Então temos*

$$\{P;\ P \text{ está em } r\} \ = \ \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

`Demonstração`: Sabemos que todos os pontos de $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}$ estão em r. Queremos provar que, se P está em r, vale a implicação

$$P \notin \overrightarrow{AB} \implies P \in \overrightarrow{AC}, \tag{9}$$

Como $P \notin \overrightarrow{AB}$, P é diferente de A e de B. Sem perda de generalidade, podemos também supor que $P \neq C$, pois $C \in \overrightarrow{AC}$ pela definição de semirreta. Neste caso, supondo $P \neq C$, segue da Proposição 4.3 que (9) é equivalente a:

$$P * A * B \implies \neg(C * A * P). \tag{10}$$

Vamos provar (10) separando nos três casos possíveis da posição relativa dos três pontos colineares P, B e C. Segue do Axioma (B3) que uma das três afirmações seguintes é satisfeita: (i) $P * C * B$, (ii) $C * P * B$ e (iii) $C * B * P$.

Se valer (i), $P * C * B$ e $C * A * B$ implicam, pela Proposição 4.8, que vale $P * C * A$, o que implica, de novo pelo Axioma B3, que não vale $C * A * P$ (note que, neste caso, a conclusão é independente de se supor que vale $P * A * B$).

Se valer (ii), $C * P * B$ e $P * A * B$ implicam que vale $C * P * A$, e portanto não vale $C * A * P$.

Se valer (iii), $C * B * P$ e $B * A * P$ implicam que vale $C * B * A$, contradizendo a hipótese $C * A * B$. Ou seja, este caso não ocorre. □

Como convencionamos na Definição 1.4, chamamos de *opostas* as duas semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Usando o Problema 4.3, podemos obter a seguinte caracterização mais conveniente dessa propriedade.

Proposição 4.11. *As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se e somente se $B * A * C$.*

`Demonstração`: Suponha que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas. Sendo distintas, segue do Problema 4.3 que $C \notin \overrightarrow{AB}$ e, em particular, que os pontos A, B e C são distintos. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, temos que A, B e C são colineares. Segue de $C \notin \overrightarrow{AB}$ e da Proposição 4.3 que $C * A * B$.

Reciprocamente, suponha que $C*A*B$. Sendo colineares os três pontos, segue do Axioma (I1) que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são distintas porque $C \notin \overrightarrow{AB}$, pelo Problema 4.3. □

Proposição 4.12. *Se $C * A * B$, então $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$.*

`Demonstração`: Pelo Axioma B1, os três pontos A, B e C são colineares; chamemos de r a reta que passa por eles três. Já sabemos que o ponto A pertence a $\overrightarrow{AC}$ e a $\overrightarrow{AB}$. O que queremos portanto provar é que, se $P \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB}$, então $P = A$; ou, equivalentemente, que se P é um ponto distinto de A na reta r, então ou P não pertence a $\overrightarrow{AC}$ ou P não pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Usando a Proposição 4.3, concluímos que o enunciado desta Proposição 4.12 é equivalente a

$$P \text{ ponto em } r,\ P \neq A \quad \Longrightarrow \quad P * A * C \text{ ou } P * A * B. \tag{11}$$

Se $P = C$, já temos, por hipótese, que $P * A * B$. Resta provar (11) quando P for distinto de C. Aplicando o Axioma B3 para os três pontos colineares P, C e A, concluímos que uma das três afirmações seguintes é válida: (i) $P * A * C$, (ii) $A * P * C$, (iii) $A * C * P$. Valendo (i), verifica-se (11). Valendo $A * P * C$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (8) que vale $B * A * P$, verificando (11). Valendo $A * C * P$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (8) que vale $B * A * P$, verificando (11). □

Podemos resumir o conteúdo das três proposições precedentes no seguinte *princípio de separação da reta*:

Um ponto A numa reta separa a reta em duas semirretas opostas que se interceptam em A.

De fato, dado A em r, tome $B \neq A$ em r (B existe pelo Axioma I2); em seguida tome C tal que $C * A * B$ (C existe pelo Axioma B2). Daí temos

$$\{P;\, P \text{ está em } r\} \;=\; \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} \;\text{ e }\; \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}.$$

Teorema da Barra Transversal.

Recorde que estamos denotando (veja a Definição 1.5) por $\angle BAC$ o ângulo que consiste da união das duas semirretas não-opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Definimos agora o *interior* do ângulo $\angle BAC$ como sendo a interseção de dois dos semiplanos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$:

Definição 4.5. *O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos P que satisfazem: (i) B e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (ii) C e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.*

O Teorema 4.14 abaixo é conhecido como o Teorema da Barra Transversal. Em sua demonstração usaremos um argumento que já foi usado na demonstração da Proposição 4.8 e que aqui enunciamos como o seguinte lema.

Lema 4.13. *Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r. Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Então Z e Q estão do mesmo lado de r.*

`Demonstração`: Se Z e Q estivessem em lados opostos de r, existiria W em r tal que $Z * W * Q$. Esse ponto W teria de ser distinto de P pois, se valesse $Z * P * Q$, não valeria $Z \in \overrightarrow{PQ}$ (pela Proposição 4.3). Daí, as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r teriam dois pontos em comum, logo seriam iguais, contrariando a hipótese que Q não está em r. □

A demonstração seguinte é uma versão detalhada de uma que encontrei na página de Bruce Conrad, professor emérito da Universidade de Temple, Filadélfia. Vale a pena olhar o original, especialmente por causa da figura: https://math.temple.edu/∼conrad/crossbar.

Teorema 4.14. *Seja X um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Então a semirreta $\overrightarrow{AX}$ passa por algum ponto do segmento BC (distinto de B e de C).*

`Demonstração`: Pelo Axioma (B2), existe um ponto D tal que $D * A * B$. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ cruza o segmento BD em A. Os pontos B, C e D não são colineares, pois D está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e C não está. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ não passa por B, nem C, nem D (se passasse, $\overleftrightarrow{AX}$ conteria um dos lados do ângulo $\angle BAC$, o que não ocorre porque X está no interior do ângulo, que implica em particular que X não está em $\overleftrightarrow{AB}$, nem em $\overleftrightarrow{AC}$). Segue então do Axioma B4 aplicado aos pontos B, C e D que a reta $\overleftrightarrow{AX}$ atravessa ou o segmento BC ou o segmento CD. Seja Y um ponto tal que $Y * A * X$. Segue da Proposição 4.10 que todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{AX}$ ou a $\overrightarrow{AY}$. Para provar que $\overrightarrow{AX}$ atravessa BC, basta portanto provar que $\overrightarrow{AY}$ não intercepta BC nem DC, e $\overrightarrow{AX}$ não intercepta DC.

Vamos denotar por $\sim_{AB}$ ou $\sim_{AC}$ as relações de equivalência "estar do mesmo lado" de $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Por hipótese, X e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Logo, Y e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{DC}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$. Pelo Lema 4.13, temos que $Z_1 \sim_{AB} C$ e $Z_2 \sim_{AB} Y$. Como $C \not\sim_{AB} Y$, segue que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$. Provamos que nenhum ponto de $\overrightarrow{AY}$ pode ser igual a um ponto de $\overrightarrow{DC}$. Em particular, $\overrightarrow{AY}$ não intercepta DC.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Por hipótese, X e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, Y e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{CB}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$. Pelo Lema 4.13, então $Z_1 \sim_{AC} B$ e $Z_2 \sim_{AC} Y$. Como $B \not\sim_{AC} Y$, segue que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Em particular $Z_1 \neq Z_2$. Daí segue que $\overrightarrow{AY}$ não intecepta BC.

O ponto D e o ponto B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$ (pois DB e $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A). O ponto B e o ponto X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, por hipótese. Logo $D \not\sim_{AC} X$. Sejam Z_1 e Z_2 tais que $Z_1 \in \overrightarrow{CD}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AX}$. Segue do Lema 4.13 e de $D \not\sim_{AC} X$ que Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$, e portanto $\overrightarrow{AX}$ não cruza DC. $\square$

Problema 4.7. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 4.8. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Problema 4.9. Considere as semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e os pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$. Mostre que, se H está no interior de $\angle KOL$, então L está no interior de $\angle HOJ$.

5. Apêndice: Relações de Equivalência

Uma *relação* em um conjunto X é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Se R é uma relação em X, é usual denotar $(x, y) \in R$ por $x \sim y$. Frequentemente definiremos uma relação definindo o significado da expressão $x \sim y$, sem fazer referência direta ao subconjunto R de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem $x \sim y$.

Uma *relação de equivalência* em um conjunto X é uma relação em X que satisfaz as três propriedades seguintes:

(1) $x \sim x$, para todo $x \in X$;
(2) se $x \sim y$, então $y \sim x$;
(3) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Chama-se de *simétrica* uma relação que satisfaça (1). Chama-se de *reflexiva* uma relação que satisfaça (2). Chama-se de *transitiva* uma relação que satisfaça (3). Usando esses termos, podemos então dizer que uma relação de equivalência é uma relação simétrica, reflexiva e transitiva.

Dada uma afirmação A, denotamos por $\neg A$ a negação de A, ou seja, a afirmação "A é falsa". Na demonstração da Proposição 5.1 vamos usar a seguinte regra de lógica: provar que as afirmações A e B implicam a afirmação C é equivalente a provar que $\neg C$ e B implicam $\neg A$.

Proposição 5.1. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X, sejam x, y e z elementos de X. Se $x \not\sim y$ e $y \sim z$, então $x \not\sim z$.*

`Demonstração`: O que queremos provar é equivalente à afirmação "se $y \sim z$ e $x \sim z$, então $x \sim y$". Esta afirmação é verdadeira, pois $\sim$ é reflexiva e transitiva. $\square$

Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Para cada $x \in X$, definimos

$$[x] = \{y \in X;\, y \sim x\}$$

Um subconjunto da forma $[x]$ para algum $x \in X$ é chamado de *classe de equivalência.* O conjunto de todas as classes de equivalência se denota por $X/\!\sim$,

$$X/\!\sim\, = \{[x];\, x \in X\},$$

e é chamado *quociente de X por $\sim$*

Proposição 5.2. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X, temos: $[x] = [y]$ se e somente se $x \sim y$.*

`Demonstração`: Suponha que $[x] = [y]$. Como $y \sim y$, temos $y \in [y]$. Como $[x] = [y]$, então $y \in [x]$, logo $y \sim x$, logo $x \sim y$.

Reciprocamente, suponha que $x \sim y$. Se $z \in [x]$, então $z \sim x$. Como $x \sim y$ e $\sim$ é transitiva, segue que $z \sim y$, ou seja, $z \in [y]$. Mostramos que $[x] \subseteq [y]$. Demonstra-se que $[y] \subseteq [x]$ da mesma maneira, trocando os papeis de x e y. $\square$

Proposição 5.3. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X, uma e apenas uma das duas afirmações seguintes é satisfeita: (i) $[x] = [y]$, (ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

`Demonstração`: Queremos provar que, se $[x]$ e $[y]$ se interceptam, então $[x] = [y]$. Suponha que existe $z \in [x] \cap [y]$. Então $z \sim x$ e $z \sim y$. Logo $x \sim y$, pois $\sim$ é reflexiva e simétrica. Logo $[x] = [y]$, pela Proposição 5.2. $\square$

Proposição 5.4. *Um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$ pode ser escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência.*

`Demonstração`: As classes de equivalência de $\sim$ são subconjuntos de X, logo

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X.$$

Todo elemento de z de X pertence à classe de equivalência $[z]$, pois $z \sim z$ (a relação é simétrica). Ou seja, se $z \in X$, então $z \in \bigcup_{x \in X} [x]$. Isto prova a igualdade

$$X = \bigcup_{x \in X} [x] \tag{12}$$

Além disso, segue da Proposição 5.3 que duas classes de equivalência distintas são disjuntas (não se interceptam). $\square$

Exemplo

Sejam dados um conjunto $\mathcal{P}$ cujos elementos chamamos de pontos e um conjunto $\mathcal{L}$ cujos elementos chamamos de retas. Além disso, para simplificar a exposição, suponhamos que cada reta é um conjunto de pontos e que "um ponto P está em uma reta r" significa que o ponto pertence à reta, ou seja, $P \in r$. Suponhamos que os Axiomas de Incidência (I1), (I2) e (I3) sejam satisfeitos e ademais que, para todo ponto P que não esteja numa reta r, exista uma única reta s paralela a r passando por P (lembrando que duas retas são paralelas se não têm um ponto em comum).

Podemos resumir o parágrafo precedente dizendo que foi dada uma geometria de incidência satisfazendo o Quinto Postulado.

Definamos a seguinte relação no conjunto $\mathcal{L}$: $r \sim s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s.

Proposição 5.5. *A relação $\sim$ que acabamos de definir em $\mathcal{L}$ é uma relação de equivalência.*

`Demonstração`: É evidente que $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provemos que é também transitiva. Sejam r, s e t retas tais que $r \sim s$ e $s \sim t$. Queremos provar que $r \sim t$. Sem perda de generalidade, podemos supor que r, s e t são três retas distintas. Por absurdo, suponhamos r não seja paralela a t, isto é, suponhamos que exista um ponto P que está em r e em t. Como s é paralela a r e a t, P não está em s e existem duas paralelas a s que passam por P, o que contradiz a hipótese de que o Quinto Postulado é satisfeito para esse modelo. $\square$

Vamos usar o modelo dado e a relação de equivalência $\sim$ para definir um novo modelo, chamado de *projetivização* do modelo dado. Nesse novo modelo, os pontos são os elementos da união disjunta

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P} \bigsqcup (\mathcal{L}/\sim),$$

isto é, há dois tipos de pontos na projetivização: os pontos do modelo original e as classes de equivalências de retas paralelas. Estas classes de equivalência são chamadas de *pontos no infinito*. As novas retas são os elementos da união disjunta

$$\mathcal{L}^* := \{r \sqcup [r];\, r \in \mathcal{L}\} \bigsqcup \{\mathcal{L}/\sim\},$$

isto é, uma reta antiga unida ao ponto no infinito por ela determinada será uma reta e, além dessas, o conjunto de todos os pontos no infinito também é uma reta.

Na projetivização do modelo dado, não existem retas paralelas. Cada reta do modelo antigo ganha um ponto no infinito. Duas retas que eram paralelas no modelo antigo passam a se encontrar no ponto no infinito que elas duas compartilham no modelo novo. Para que os axiomas da geometria de incidência sejam satisfeitos, foi preciso que chamássemos de reta também o conjunto de todos os pontos no infinito.

A demonstração, que omitimos aqui, de que a projetivização satisfaz os três axiomas de incidência pode ser encontrada na seção "Projective and Affine Planes" [2, Chapter 2]. A Figura 2.8 do Exemplo 7 de [2, Chapter 2] é uma interpretação geométrica da projetivização do plano usual da geometria euclideana.

Referências

[1] Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo. Editora da Unesp, 2009.
[2] M. J. Greenberg. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 3^a edição. W. H. Freeman, 2003.
[3] R. Hartshorne. Geometry: Euclid and Beyond. Springer, 1997.
[4] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie, 1903.
Traduções para o inglês e o espanhol: Foundations of Geometry, Fundamentos de la Geometría.
[5] R. Millman & G. Parker. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.
[6] Edwin Moise. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.