LISTA DE EXERCÍCIOS

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2023
IME - USP
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Problema 1. Assumindo apenas os axiomas de incidência mostre que, dado um ponto P, existem pontos Q e R tais que P, Q e R não sejam colineares

Problema 2. Seja S um conjunto finito, com n elementos, seja R o conjunto dos subconjuntos de dois pontos de R. Chame de pontos os elementos de S, chame de retas os elementos de R e diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) com essas interpretações, obtemos um modelo da geometria de incidência; (b) se $n = 3$, não existem retas paralelas; (c) se $n = 4$, o Quinto Postulado de Euclides é satisfeito; (d) se $n = 5$, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas paralelas a r passando por P.

Problema 3. Chame de pontos os elementos do conjunto $S \coloneqq \{A, B, C, D, E, F, G\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S,

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, G\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\},$$

diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) com essas interpretações, obtemos um modelo da geometria de incidência, (b) não existem paralelas, (c) por cada ponto passam três retas.

Problema 4. Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P;\ P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Problema 5. Chame de pontos os elementos do conjunto $S \coloneqq \{A, B, C, D\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S,

$$\{A, B, D\}, \quad \{B, C, D\}, \quad \{A, C\},$$

diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) dados dois pontos existe uma reta passando por eles, mas nem sempre essa reta é única, (b) toda reta possui pelo menos dois pontos, (c) existem três pontos não-colineares, (d) não existe um par de retas paralelas.

Problema 6. Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC.

Problema 7. Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos colineares que não estão em r. Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Problema 8. Seja H um semiplano delimitado pela reta r. Mostre que, se $A, B \in H$ e Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos não-colineares que não estão em r. Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.$A * P * B$, então $P \in H$.

Problema 9. Mostre que as duas condições $A*B*D$ e $A*C*D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A*B*C*D$.

Problema 10. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Problema 11. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 12. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Problema 13. Considere as semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e os pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$. Mostre que, se H está no interior de $\angle KOL$, então L está no interior de $\angle HOJ$.

Problema 14. Suponha que $A * B * C$ na reta r e que $A * D * E$ na reta s. Mostre que os segmentos BE e CD se interceptam em um ponto M e que M pertence aos interiores dos ângulo $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$

Problema 15. Suponha que os pontos C e C' estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ sejam paralelas. Mostre que o ponto de interseção do segmento CC' com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está entre A e B.
Dica: estude a demonstração da existência da mediatriz de segmentos, Teorema 7.23 das Notas de Aula.

Problema 16. São dados segmentos congruentes $AB \cong A'B'$ e dois pares de ângulos congruentes $\angle XAB \cong \angle X'A'B'$ e $\angle YBA \cong \angle Y'B'A'$. Mostre que, se as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ se interceptam e se X' e Y' estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$, então $\overrightarrow{A'X'}$ e $\overrightarrow{B'Y'}$ se interceptam. Dica: use LAL. [1]

Problema 17. Suponha que são válidos os axiomas de incidência, os axiomas de ordenamento e os cinco primeiros axiomas de congruência. Mostre que, se o seguinte axioma é satisfeito:

(C6h) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle ACB \cong \angle DFE$,

então necessariamente vale o sexto axioma de congruência (o caso LAL de congruência de triângulos).
`Sugestão`: (i) mudando de notação, obtenha mais uma congruência de ângulos, (ii) suponha que a terceira congruência de lados não seja satisfeita, transporte o segmento CB para a semirreta $\overrightarrow{FE}$ e note que a unicidade de (C4) terá sido violada.

Problema 18. Usando que suplementares de congruentes são congruentes (para um enunciado mais preciso, veja a Proposição 6.4 das Notas de Aula), mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Problema 19. Demonstre a recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles. Mais precisamente, dados A, B e C três pontos não-colineares, mostre que, se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são congruentes, então os segmentos AB e AC são congruentes. `Sugestão`*:* Imite a demonstração de Papus do Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5.5 das Notas de Aula), substituindo congruência LAL por congruência ALA.

Problema 20. Mostre que um triângulo é equilátero (seus três lados são dois-a-dois congruentes) se e somente se ele é equiângulo (seus três ângulos são dois-a-dois congruentes).
`Sugestões`: Resolva primeiro o Problema 19. Use também LLL.

Problema 21. Considere os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$. Suponha que sejam retos os ângulos $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ e que valham as congruências $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$. Seja D o único ponto tal que $D * B * C$ e $DB \cong B'C'$ (você deve se convencer de que a existência e a unicidade de D decorrem do Axioma C1, mas não é preciso escrever isso na sua solução).
(a) Mostre que $\angle ABD \cong \angle A'B'C'$.
(b) Mostre que $\Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$.
(c) Mostre que o triângulo ΔADC é isósceles.
(d) Mostre que $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.
`Observação`. Este problema deve ser resolvido sem se supor válido o Quinto Postulado de Euclides e suas consequências. Apenas os axiomas de incidência, ordenamento e congruência de Hilbert e suas consequências podem ser usados. Em particular, pode-se usar o Quarto Postulado de Euclides, que é consequência dos citados axiomas de Hilbert, como vimos no Teorema 7.13 das Notas de Aula.

Problema 22. São dados quatro pontos A, B, C e D. Quaisquer três dentre os pontos dados são não-colineares. Além disso, o ponto D está no interior do ângulo $\angle BAC$ e C está no interior de $\angle ABD$. Suponha que $\angle BAD \cong \angle ABC$ e $\angle CAD \cong \angle DBC$.
(b) Mostre que $\angle BAC \cong \angle ABD$.
(c) Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
(d) Mostre que $\Delta CBD \cong \Delta DAC$.

[1] `Observação`. Este é um problema em "geometria neutra", ou seja, deve ser resolvido usando apenas os axiomas de incidência, de ordenamento e de congruência. Se se supuser válido o Quinto Postulado de Euclides, é fácil provar que duas semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ (com $A \neq B$ e X e Y do mesmo lado que $\overleftrightarrow{AB}$) se interceptam se e somente se a soma dos ângulos $\angle XAB$ e $\angle YBA$ é menor do que dois retos. Daí, a afirmação do problema segue usando propriedades de congruência e de desigualdades de ângulos.