Questão 1) (2,5 pts) Suponha que o triângulo ΔABC seja equiângulo, isto é, que tenhamos $\angle ABC \cong \angle BCA \cong \angle CAB$. Mostre que ΔABC é equilátero, isto é, que temos $AB \cong BC \cong AC$. Dica: Problema 5.3.

Temos que

$$\begin{cases} BC \cong CB & (\text{pois } BC = CB) \\ \angle ABC \cong \angle ACB & (\text{hipotese}) \\ \angle ACB \cong \angle ABC & (\text{hipótese}) \end{cases}$$

Então, pelo caso ALA de congruência, segue que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Em particular temos $AB \cong AC$.

Também vale que

$$\begin{cases} AB \cong BA & (\text{pois } AB = BA) \\ \angle ABC \cong \angle CAB \cong \angle BAC & (\text{hipotese e } \angle CAB = \angle BAC) \\ \angle BAC \cong \angle CAB \cong \angle ABC & (\text{hipotese e } \angle BAC = \angle CAB) \end{cases}$$

Então, pelo caso ALA de congruência vale que $\Delta ABC \cong \Delta BAC$. Em particular temos $AC \cong BC$. Portanto, como $AB \cong AC$ e $AC \cong BC$, segue, do axioma (C2), que $AB \cong BC$ donde obtemos $AB \cong AC \cong BC$.

Questão 2) (3,5 pts)

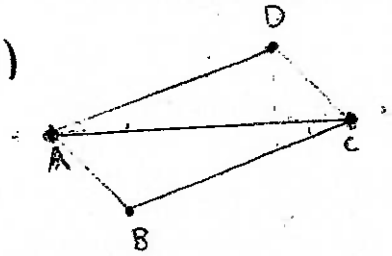
Os pontos A, B, C e D são tais que D e B estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, $DC \cong AB$ e $AD \cong BC$.

(a) Faça uma figura que ilustre a situação descrita.

(b) Mostre que $\Delta ACD \cong \Delta CAB$. Dica: LLL.

(c) Mostre que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, assim como $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Dica: Proposição 7.20. [1]

(a)



$D \underset{AC}{\nsim} B$, $DC \cong AB$, $AD \cong BC$

(b) temos, por hipótese, que $DC \cong AB$ e $AD \cong BC$. como ambos os triângulos possuem o lado CA em comum, temos que $AC \cong CA$. como $D \underset{AC}{\nsim} B$, temos que A, B, C não colineares e A, D, C não colineares, logo, pelo Teorema 6.8, temos:

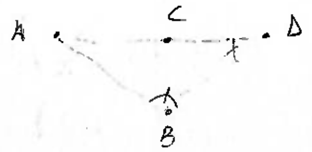
$$\left.\begin{array}{l} AC \cong CA \\ CD \cong AB \\ DA \cong BC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \cong \Delta CAB$$

*podemos mudar a ordem porque o axioma C2 permite porque a congruência é relação de equivalência

(c) considerando as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$, temos pela definição 7.4 que $\angle DAC$ e $\angle ACB$ são pares de ângulos alternos internos. por (b), $\Delta ACD \cong \Delta CAB$. em particular, $\angle DAC \cong ACB$. então, pela prop. 7.20, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas

considerando as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$, temos pela def 7.4 que $\angle DAC$ e $\angle ACA$ são pares de ângulos alternos internos, por (b), $\Delta ACD \cong \Delta CAB$. em particular, $\angle DAC \cong ACB$ então, pela prop 7.20, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ são paralelas.

[1] Observação motivacional: Esta questão mostra que se, em um quadrilátero, os dois pares de lados opostos são congruentes, então os dois pares de lados opostos são também paralelos.



Questão 3 (4 pts) Os pontos A, B, C e D são tais que $A * C * D$, B não está em $\overleftrightarrow{AC}$, e $AB \cong AD$.

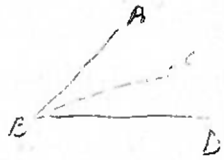
(a) Faça uma figura que ilustre a situação descrita.

(b) Mostre que C está no interior de $\angle ABD$. Dica: Definição 4.5 e Lema 4.13.

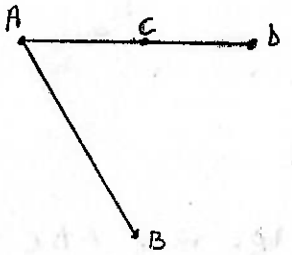
(c) Mostre que $\angle ABD \cong \angle ADB$. Dica: Teorema do Triângulo Isósceles.

(d) Mostre que $\angle ABC < \angle ADB$. Dica: Proposição 7.8.

(e) Mostre que $\angle ABC < \angle BCA$. Dica: Teorema 7.14 no triângulo ΔBDC e Proposição 7.9. [2]



a)



Obs: para evidenciar que $AB \cong AD$ eu usei dois segmentos da mesma cor (verde claro)

(b) Queremos mostrar que $C \in \text{int}\angle ABD$.

Considere a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Considere a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Note que D está em $\overrightarrow{AC}$, pois $A*C*D$ por hipótese e vale (B_1) e (B_2). Assim, pelo lema 4.13 temos que $C \sim_{AB} D$.

Agora, considere a reta $\overleftrightarrow{BD}$. Considere a semirreta $\overrightarrow{DC}$. Note que A está em $\overrightarrow{DC}$, pois $A*C*D$ por hipótese e vale (B_1) e (B_2). Assim, pelo lema 4.13, temos que $A \sim_{BD} C$.

Dessa forma, como $C \sim_{AB} D$ e $A \sim_{BD} C$, pela definição 4.5, vale que $C \in \text{int}\angle ABD$. □

(c) Queremos mostrar que $\angle ABD \cong \angle ADB$. Note que A, D e B são três pontos não colineares pois $A*C*D$ então A e D são colineares por (B_1), mas B não está em $\overleftrightarrow{AC}$ por hipótese e pelo postulado 1 temos que $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD}$, então B não está em $\overleftrightarrow{AD}$ $\therefore$ A, B e D não são colineares.

Bom, como mostrei A, B e D são pontos não colineares. Além disso, por hipótese $AB \cong AD$, então pelo Teorema do Triângulo Isósceles (proposição 5.5) temos que $\angle ABD \cong \angle ADB$.

Portanto, provamos o desejado: que $\angle ABD \cong \angle ADB$. □

(d) Queremos mostrar que $\angle ABC < \angle ADB$.

Note que existe $X \in \text{int}\angle ABD$ tal que $\angle ABC \cong \angle ABX$, basta tomar $X = C$ (pois pelo item (b) $C \in \text{int}\angle ABD$). Com isso, pela definição 7.2, temos que $\angle ABC < \angle ABD$.

Ora se $\angle ABC < \angle ABD$ e $\angle ABD \cong \angle ADB$ (provado em item (c)), então pela proposição 7.8, temos que $\angle ABC < \angle ADB$ □

Portanto, provamos que $\angle ABC < \angle ADB$.

Vire...

[2] Observação motivacional: Esta questão mostra que se, em um triângulo, um lado é menor do que um outro, então os ângulos opostos correspondentes satisfazem a mesma desigualdade.

(e) Queremos mostrar que $\angle ABC < \angle BCA$.

Sabemos que $A * C * D$. Considere a reta $\overleftrightarrow{CB}$, note que $A \sim_{CB} D$, pois B não está em $\overleftrightarrow{AD}$ (já discutido no item (c)). Logo, considere a semirreta $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CD}$, como $A*C*D$ e vale (B3), então $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm sentidos opostos. Então, $\angle BCA$ e $\angle DCB$ são suplementares. Dessa forma, por definição (tem na cola antes do Teorema 7.14) temos que $\angle BCA$ é um ângulo externo ao $\angle DCB$, que é um ângulo do ΔBDC.

Com isso, pelo Teorema 7.14 temos que $\angle BCA$ é maior que os ângulos de ΔBDC não adjacentes à ele (isso é, distintos de $\angle DCB$).

Então $\angle BCA > \angle BDC$ (*).

Ora, note que A está em $\overrightarrow{DC}$, pois $A*C*D$, logo $\angle BDC \cong \angle ADB$, dada a definição de ângulo (1,5).

Com isso, usando a Proposição 7.8, temos que $\angle BCA > \angle ADB$.

Entretanto, pelo item (d), temos que $\angle ABC < \angle ADB$.

Portanto, pela Proposição 7.9. temos que $\angle ABC < \angle BCA$, como queríamos $\square$