Questão 1) (3 pts) Considere a seguinte interpretação da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, as retas são os seguintes subconjuntos de S:

$$\underset{r_1}{\overleftrightarrow{\{A, B\}}}, \quad \underset{r_2}{\overleftrightarrow{\{A, C\}}}, \quad \underset{r_3}{\overleftrightarrow{\{A, D\}}} \quad \text{e} \quad \underset{r_4}{\overleftrightarrow{\{B, C, D\}}}.$$

(a) Mostre que todos os axiomas de incidência são satisfeitos.

(b) Mostre que neste modelo não existem retas paralelas.

a) vamos mostrar que todos três axiomas de incidência são satisfeitos

(I1) mostrar que por cada par de pontos existe uma única reta que passa pelos dois.

Tome A e B, a única reta que passa por ambos é r_1
Tome A e C, a única reta que passa por ambos é r_2
Tome A e D, a única reta que passa por ambos é r_3
pelo postulado 1 de Euclides $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{DA}$
Tome B e C, A única reta que passa por ambos é r_4
Tome B e D, a única reta que passa por ambos é r_4
pelo postulado 1 de Euclides $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{DB}$
Tome C e D, a única reta que passa por ambos é r_4
e com $\overleftrightarrow{DC} = \overleftrightarrow{CD}$, por quaisquer par de pontos tomados, passa-se uma única reta.

(I2) mostrar que dada reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r

nosso enunciado afirma que os elementos do conjunto S são pontos, e os subconjuntos dele são retas mas quais temos
$\{A, B\} = \overleftrightarrow{AB}$, $\{A, C\} = \overleftrightarrow{AC}$, $\{A, D\} = \overleftrightarrow{AD}$ e $\{B, C, D\} = \overleftrightarrow{BCD}$

na reta $\overleftrightarrow{AB}$ temos dois pontos, respectivamente A e B
na reta $\overleftrightarrow{AC}$ " " " " " " A e C
na reta $\overleftrightarrow{AD}$ " " " " " " A e D
e na reta $\overleftrightarrow{BCD}$ como é composta por três pontos, é claro que contém pelo menos dois pontos na mesma.

(I3) Mostrar que existem pelo menos três pontos não colineares

Tome $\overleftrightarrow{AD}$, por (I1) temos que a única reta que passa por A e D ao mesmo tempo é r3, tome em consideração do conjunto S, o ponto B, o ponto B não pertence à r3, então pela definição de pontos colineares que seriam colineares só se estivessem na mesma reta ou seja, r passasse por A, D e B simultaneamente mas como B não pertence à r3, logo A, D e B são não colineares

Logo todos axiomas de incidência são satisfeitos

b) mostrar que não há retas paralelas

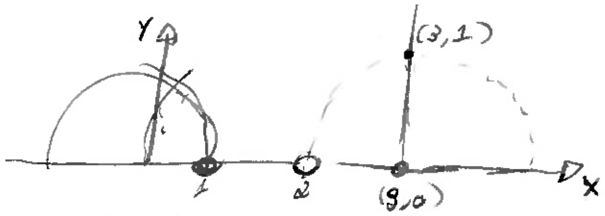
Temos então as retas: $\underset{r1}{\overleftrightarrow{AB}}$, $\underset{r2}{\overleftrightarrow{AC}}$, $\underset{r3}{\overleftrightarrow{AD}}$ e $\underset{r4}{\overleftrightarrow{BCD}}$

A definição de paralelas nos diz que serão paralelas se e somente se não forem concorrentes, ou seja não possuírem um ponto em comum.

para isso mostraremos que quaisquer duas retas distintas, ambas haverão um ponto em comum

* r1 e r2, possuem o ponto A em comum
r1 e r3, possuem o ponto A em comum
r1 e r4, possuem o ponto B em comum
r2 e r3, possuem o ponto A em comum
r2 e r4, possuem o ponto C em comum
r3 e r4, possuem o ponto D em comum

Logo, concluímos que não há paralelas.



Questão 2 (2 pts) Seja r a reta $\{(x,y);\ x^2+y^2=1,\ y>0\}$ no Plano de Poincaré, e considere o ponto $P=(3,1)$. Mostre que existe mais de uma paralela a r passando por P.

Dado que estamos no Plano de Poincaré, as retas são descritas de duas formas: $L_{a,r} = \{(x,y) / (x-a)^2+y^2=r^2 ;\ y>0\}$ e $L_a = \{(x,y) / \ x=a,\ y>0\}$

Considere então duas retas s e h.

$s = \{(x,y) / (x-3)^2+y^2=1,\ y>0\}$; $h = \{(x,y) / \ x=3,\ y>0\}$

Note que s e h passam por $(3,1)$, note também que ambas retas não compartilham pontos com r:

$\begin{cases} r \\ s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-3)^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+\cancel{y^2}=(x-3)^2+\cancel{y^2} \Rightarrow x^2=(x-3)^2 \Rightarrow x=x-3 \Rightarrow -3=0$; absurdo.

$\begin{cases} r \\ h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow (3)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=-8$, absurdo (estamos trabalhando nos reais)

$\therefore$ Existem mais de uma reta paralela a r que passa por P.

Questão 3) (5 pts) Sejam r e s duas retas concorrentes que se cruzam no ponto A, sejam B e C pontos em r tais que $A * B * C$, sejam D e E pontos em s tais que $A * D * E$.

(a) Faça uma figura que ilustre a situação descrita.

Justifique cada uma das afirmações seguintes, preferencialmente citando definições, axiomas ou proposições das Notas de Aula.

(b) A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$.

(c) A e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.

(d) B e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.

(e) Existe M em $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $B * M * E$, existe N em $\overleftrightarrow{BE}$ tal que $C * N * D$.

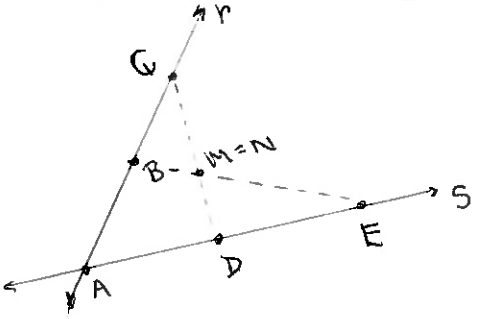
(f) $M = N$.

(g) M pertence ao interior de $\angle CAE$.

(h) A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CE}$, B e M estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CE}$.

(i) M pertence ao interior de $\angle ACE$.

(a)



~~(b) Note que caso A e B não estivessem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, teríamos que $A \nsim_{CD} B \Rightarrow AB$ cruza $\overleftrightarrow{CD}$ (def. 4.3)~~

(b) Temos a reta $\overleftrightarrow{CD}$, C um ponto em $\overleftrightarrow{CD}$ (def.) e A fora de $\overleftrightarrow{CD}$ (se A estivesse em $\overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} = r$ (I1) $\Rightarrow$ D em r $\Rightarrow$ dois ptos de intersecção A e D, absurdo (prop. 2.2)).
Temos também B ≠ A na semirreta $\overrightarrow{CA}$ ($A*B*C \Rightarrow C*B*A$ (B1) e def. de semirreta). Então pelo lema 4.13, temos B e A do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$
Para A, D e $\overleftrightarrow{BE}$ o argumento é similar, basta aplicar o lema

c) Note que D está em $\overleftrightarrow{CD}$ (def.) e em s (hip), então $\overleftrightarrow{CD}$ cruza s em D (prop 2.2), e como $A*D*E$, temos que $\overleftrightarrow{CD}$ cruza o segmento AE (def 4.1) $\Rightarrow$ A e E em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$ (def. 4.3)
Para A, C e $\overleftrightarrow{BE}$ o argumento é o mesmo.

d) Seja o triângulo $\triangle ABE$, note que $\overleftrightarrow{CD}$ cruza o lado AE em D $(A*D*E)$ e não cruza o lado AB (pois senão teríamos $A*C*B$), então por B4, $\overleftrightarrow{CD}$ cruza $BE \Rightarrow B$ e E em lados opostos.
Para C, D e $\overleftrightarrow{BE}$, é o mesmo argumento considerando $\triangle ACD$.

e) Pela def. 4.1 e como provado no item anterior, temos que $\exists M$ em $\overleftrightarrow{CD}$ tq $B*M*E$. Assim como $\exists N$ em $\overleftrightarrow{BE}$ tq $C*N*D$

f) Note que M está em $\overleftrightarrow{CD}$ e em $\overleftrightarrow{BE}$ (pois $BE \subset \overleftrightarrow{BE}$), logo M deve ser o único ponto de intersecção. Mas N está em $\overleftrightarrow{CD}$ ($CD \subset \overleftrightarrow{CD}$) e $\overleftrightarrow{BE}$ também, portanto $N = M$

g) (i) M e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AE}$, pois $MC \subset \overleftrightarrow{MC} = \overleftrightarrow{CD}$ (pois $C*M*D$) e $\overleftrightarrow{CD}$ intercepta $\overleftrightarrow{AE}$ em D $(A*D*E)$, então como o ponto de cruzamento é único e está fora de MC $(C*M*D)$, temos que MC não cruza $\overleftrightarrow{AE}$.
(ii) ME não cruza $\overleftrightarrow{AC}$, pois a intersecção de $\overleftrightarrow{ME}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é B tq $E*M*B$.
Por (i), (ii) e pela def 4.5 temos que M pertence ao interior de $\angle CAE$

Use esta página como rascunho ou como espaço para continuar as soluções das questões.

(h) Note que C está em $\overleftrightarrow{AB}$, mas não em AB (A*B*C), e $\overleftrightarrow{CE}$ cruza $\overleftrightarrow{AB}$ em C, ou seja, não cruza o segmento AB (def. 4.1)

Note que E está em $\overleftrightarrow{BM}$, mas não em BM (B*M*E), e $\overleftrightarrow{CE}$ cruza $\overleftrightarrow{BM}$ em E, ou seja, não cruza o segmento BM

(i) Provamos pelo item (h) que A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CE}$, e que $B \sim_{\overleftrightarrow{CE}} M$, então pela prop 4.7 $A \sim_{\overleftrightarrow{CE}} M$. Provamos em (g) que $M \sim_{\overleftrightarrow{AC}} E$.

Portanto, ~~por~~ pela def. 4.5 M pertence ao interior de $\angle ACE$