MAT0334-MAT5721 Análise Funcional

Prova Substitutiva - 19 de julho de 2022

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1) (2,5 pts) Considere o espaço $C([0,1])$ munido da "norma do sup", $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Calcule a norma do operador

$$V : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]), \qquad Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Questão 2) (2,5 pts) Em $C(S^1) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f$ é contínua e periódica de período $2\pi\}$, considere as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ definidas por $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$ e $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. O espaço $L^1(S^1)$ é o completamento de $(C(S^1), \|\cdot\|_1)$. O conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios trigonométricos é denso em $(C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

Usando as definições e resultados enunciados no parágrafo precedente, mostre que $\mathcal{P}$, visto da maneira canônica como um subespaço de $L^1(S^1)$, é denso em $L^1(S^1)$.

Questão 3) (2,5 pts) Considere a sequência $(a_n)_n \in \ell^1$.

(a) Mostre que, para toda $(x_n)_n \in \ell^\infty$, a série $\sum_n |a_n x_n|$ é absolutamente convergente.

(b) Mostre que $\lambda : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda((x_n)_n) = \sum_n a_n x_n$ é um funcional limitado.

(c) Mostre que $\|\lambda\| = \|(a_n)_n\|_1$.

Questão 4) (2,5 pts) Sejam H um espaço de Hilbert e $(x_n)_n$ uma sequência em H tal que, para todo $z \in H$, a sequência $(\langle x_n, z\rangle)_n$ é convergente em $\mathbb{C}$. Mostre que existe $x \in H$ tal que, para todo $z \in H$, $\lim_n \langle x_n, z\rangle = \langle x, z\rangle$. `Sugestões`: (1) Use o princípio da limitação uniforme para os funcionais lineares contínuos definidos pelos x_ns em H. (2) Use o Lema de Riesz.

RASCUNHO