MAT0230 - Geometria e Desenho Geométrico I - Turma 42

2^a Prova - 16 de dezembro de 2022

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

GABARITO

Questão 1 (2 pts) Mostre que um triângulo não pode possuir dois ângulos retos.

Resolução 1.

Seja um triângulo $\triangle ABC$. Suponha, por absurdo, que $\angle ABC$ e $\angle BAC$ são retos. Portanto, tem-se que $\angle ABC \cong \angle BAC$. Seja o ponto D tal que $D * B * C$. Então, por definição de ângulos suplementares, $\angle ABD$ é suplementar de $\angle ABC$, que é reto. Disso segue, por definição de ângulo reto, que $\angle ABC \cong \angle ABD$. Das duas congruências descritas, por **(C2)** vem $\angle ABD \cong \angle BAC$. Como DC intercepta $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ em B, temos que C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, logo $\angle ABD$ e $\angle BAC$ são alternos internos em relação às retas $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}(= \overleftrightarrow{\mathrm{BC}})$ com a transversal $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$. Então, aplicando o **Teorema 9.11** vem que $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ são paralelas, absurdo, pois C está nas duas. Logo, segue o desejado.

Questão 2) (2,5 pts) Seja ΔABC um triângulo equilátero. Mostre que seus três ângulos internos são congruentes entre si. `Sugestão`: Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta BAC$.

Resolução 2.

Por definição de triângulo equilátero, temos que

(i) $AB \cong AC$,

(ii) $AB \cong BC$,

(iii) $AC \cong BC$.

Queremos mostrar que

(`A`) $\angle ABC \cong \angle BAC$,

(`B`) $\angle ABC \cong \angle BCA$,

(`C`) $\angle ACB \cong \angle BAC$.

Note que

$$\begin{array}{cccll} AB & \cong & BA & \textbf{(L)} & \text{por } \textbf{(C2)} \\ BC & \cong & AC & \textbf{(L)} & \text{por (iii)} \\ CA & \cong & CB & \textbf{(L)} & \text{por (iii)} \\ \hline \triangle ABC & \cong & \triangle BAC & \textbf{(LLL)} & \end{array}$$

e, portanto, $\angle ABC \cong \angle BAC$ (`A`). Note, também, que

$$\begin{array}{cccll} AB & \cong & BC & \textbf{(L)} & \text{por (ii)} \\ BC & \cong & CA & \textbf{(L)} & \text{por (iii)} \\ CA & \cong & AB & \textbf{(L)} & \text{por (i)} \\ \hline \triangle ABC & \cong & \triangle BCA & \textbf{(LLL)} & \end{array}$$

e, portanto, $\angle ABC \cong \angle BCA$ (`B`) e $\angle ACB \cong \angle BAC$ (`C`), logo vale o desejado.

Questão 3) (2,5 pts) Sejam ΔABC e ΔABD triângulos equiláteros tais que C e D estejam em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Mostre que C, A e D não são colineares.

Resolução 3.

Suponha, por absurdo, que C, A, D são colineares. Como por hipótese C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, tem-se que $C * A * D$. Logo, por definição, $\angle BAD$ é externo ao $\triangle ABC$ e $\angle BAC$ é externo ao $\triangle ABD$, e então pelo **Teorema 9.5** tem-se que (i) $\angle BAD > \angle ABC$ e (ii) $\angle BAC > \angle ABD$. Usando o resultado da Questão 2 no $\triangle ABC$ e no $\triangle ABD$, tem-se que (iii) $\angle BAC \cong \angle ABC$ e (iv) $\angle BAD \cong \angle ABD$. Usando a compatibilidade entre congruência e desigualdade de ângulos (Problema 8.3 proposto nas notas de aula), segue de (i), (iii) e (iv) que $\angle ABD > \angle BAC$. Mas isto, com (ii), é absurdo, pois a desigualdade de ângulos é tricotômica (Problema 8.2 proposto nas notas de aula). Logo, vale o desejado.

Questão 4) (3 pts) São dados quatro pontos A, B, C e D. Quaisquer três dentre os pontos dados são não-colineares, o ponto D está no interior do ângulo $\angle BAC$ e C está no interior de $\angle ABD$. Além disso, suponha que $AC \cong BD$ e $AB \cong CD$.

(a) Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.

(b) Mostre que AB é paralelo a CD e que AC é paralelo a BD.

Resolução 4.

(a)

$$\begin{array}{ccccl} AB & \cong & DC & \textbf{(L)} & \text{por hipótese} \\ BC & \cong & CB & \textbf{(L)} & \text{por } \textbf{(C2)} \\ CA & \cong & BD & \textbf{(L)} & \text{por hipótese} \\ \hline \triangle ABC & \cong & \triangle DCB & \textbf{(LLL)} & \end{array}$$

(b)

O item (a) implica em (i) $\angle ABC \cong \angle DCB$ e (ii) $\angle ACB \cong \angle DBC$.

Como C está no interior de $\angle ABD$, o Teorema da Barra Transversal garante que AD intercepta $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, portanto também intercepta $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ e por definição segue que A e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$. Logo, os ângulos em (i) são alternos internos em relação às retas $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overleftrightarrow{\mathrm{CD}}$ e a transversal $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$, e os ângulos em (ii) são alternos internos em relação às retas $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}$ e a transversal $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$. Portanto, aplicando o **Teorema 9.11** nessas duas situações segue (da primeira) que $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ é paralela a $\overleftrightarrow{\mathrm{CD}}$ e (da segunda) que $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ é paralela a $\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}$. Logo, vale o desejado.

Use esta página como rascunho ou como espaço para continuar as soluções das questões.

Axiomas e teoremas que podem ser úteis.

(I1) Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r que passa por P e por Q.

(I2) Dada uma reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r.

(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

(B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.

(B2) Dados dois pontos B e D, existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.

(B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

(B4) Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos que não estão em r. (i) Se os pontos A e B estão do mesmo lado da reta r, e os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r. (ii) Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r, e os pontos B e C estão em lados opostos da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r.

(C1) Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.

(C2) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.

(C3) Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.

(C4) Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

(C5) Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

(C6) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

(E) Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos. Se Γ_1 possui pelo menos um ponto no interior de Γ_2 e pelo menos um ponto no exterior de Γ_2, então Γ_1 e Γ_2 possuem exatamente dois pontos de interseção.

Teorema 9.5. Um ângulo exterior de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno que não lhe seja adjacente.

Teorema 9.11. Se duas retas interceptadas por uma transversal possuem um par de ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.