MAT0334-MAT5721 Análise Funcional

2^a Prova - 12 de julho de 2022

Questão 1) (2 pts) Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear entre os espaços normados X e Y satisfazendo a seguinte condição

$$\lim_n x_n = 0 \text{ e } \lim_n Tx_n = b \qquad \Longrightarrow \qquad b = 0.$$

Mostre que o gráfico de T, $\{(x, Tx);\, x \in X\}$, é um subespaço fechado do produto cartesiano $X \times Y$ munido da norma $\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$, $(x,y) \in X \times Y$.

`Solução:`

Seja (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ uma sequência pertence ao gráfico de T e convergente, $\lim_n (x_n, y_n) = (a, b)$. Queremos provar que (a,b) pertence ao gráfico de T. Temos

$$\|x_n - a\| \leq \|(x_n, y_n) - (a,b)\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|y_n - b\| \leq \|(x_n . y_n) - (a,b)\|_1$$

Segue portanto de $\lim_n (x_n, y_n) = (a,b)$ que $\lim_n x_n = a$ e $\lim_n y_n = b$. Considere agora a sequência $x_n' := x_n - a$. Temos então

$$\lim_n x_n' = a \quad \text{e} \quad \lim_n Tx_n' = \lim_n (Tx_n - Ta) = \lim_n (y_n - Ta) = b - Ta.$$

(usamos que $y_n = Tx_n$ pois (x_n, y_n) pertence ao gráfico de T). Segue da hipótese sobre T que $b - Ta = 0$, ou seja, que (a,b) pertence ao gráfico de T, como queríamos.

Questão 2) (2,5 pts) Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte condição

$$\lim_n x_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \lambda(Tx_n) = 0, \text{ para todo } \lambda \in Y^*.$$

(a) Mostre que, se $(x_n)_n$ é qualquer sequência em X convergindo para 0 tal que $Tx_n \longrightarrow b$ em Y, então $b = 0$. `Dica`: use uma consequência do Teorema de Hahn-Banach.

(b) Mostre que T é limitada. `Dica`: use o Teorema do Gráfico Fechado.

Recordemos que, se H é um espaço de Hilbert e $\{x_1, x_2, \cdots\}$ é uma base hilbertiana de H, então, para todo $y \in H$, temos $y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, y\rangle x_j$ e $\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j, y\rangle|^2$.

Questão 3) (2,5 pts) Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{x_1, x_2, \cdots\}$ uma base hilbertiana de H. Suponha que $T : H \to H$ é um operador linear limitado e que existem complexos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ tais que $Tx_j = \lambda_j x_j$ para todo j. Tome $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \lambda_j$ para todo j. Mostre que $T - \mu I$ é injetor.

Questão 4 (3 pts) Seja X o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínuas e limitadas, munido da "norma do sup", $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Seja Y o subespaço das f em X tais que existem os limites $\lim_{t\to\infty} f(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} f(t)$. Mostre que existe $\Lambda \in X^*$, $\|\Lambda\| = 2$, tal que

$$\Lambda(f) = \lim_{t\to\infty} f(t) - \lim_{t\to-\infty} f(t),$$

para toda $f \in Y$.