MAT0334-MAT5721 Análise Funcional

1^a Prova - 17 de maio de 2022

Questão 1) (2 pts) Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua entre os espaços normados X e Y, seja D um subespaço denso de X. Suponha que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in D$. Mostre que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

`Solução`: Dado $x \in X$ arbitrário, segue da densidade de D em X que existe sequência $x_n \in D$ tal que $\lim\limits_n x_n = x$. Segue da continuidade de T que $\lim\limits_n Tx_n = Tx$. Segue da continuidade da norma e do fato de que $\|Tx_n\| = \|x_n\|$ (pois $x_n \in D$) que

$$\|Tx\| = \lim_n \|Tx_n\| = \lim_n \|x_n\| = \|x\|,$$

como queríamos provar.

Questão 2) (2 pts) Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em V. Mostre que, para todo $x \in V$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = 0$.

`Sugestão`: use a desigualdade de Bessel.

`Solução`: A desigualdade de Bessel nos dá

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_n, x\rangle|^2 \ \le\ \|x\|^2.$$

A convergência da série no lado esquerdo desta desigualdade, implica que o termo geral tende a zero, ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} |\langle x_n, x\rangle|^2 = 0$, donde decorre que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = 0$.

Questão 3) (3 pts) Sejam M e N dois subespaços fechados do espaço de Hilbert H. Suponha que M e N sejam ortogonais um ao outro, isto é, que $\langle x, y\rangle = 0$ sempre que $x \in M$ e $y \in N$. Mostre que $M + N$ é fechado.

`Sugestão`: mostre que, se $(x_n + y_n)_n$ em $M + N$ é convergente, então $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são de Cauchy.

`Solução 1`: Seja $(x_n + y_n)_n$, $x_n \in M$, $y_n \in N$, uma sequência em $M + N$, convergente para $z \in H$. Queremos provar que $z \in M + N$. Para todos m, n, usando que $x_n - x_m$ é ortogonal a $y_n - y_m$, temos

$$\|x_m - x_n\|^2 \le \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2 = \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\|^2.$$

A sequência $(x_n + y_n)_n$ é de Cauchy, pois é convergente. Segue da desigualdade precedente que $(x_n)_n$ também é de Cauchy. Do mesmo modo, demonstra-se que $(y_n)_n$ também é de Cauchy.

Sendo H completo, existem $x, y \in H$ tais que $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n y_n = y$. Como M e N são fechados, $x \in M$ e $y \in N$. Logo,

$$z = \lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n = x + y,$$

logo $z \in M + N$, como queríamos.

`Solução 2`: Seja $(x_n + y_n)_n$, $x_n \in M$, $y_n \in N$, uma sequência em $M + N$, convergente para $z \in H$. Queremos provar que $z \in M + N$. Sejam P e Q as projeções ortogonais sobre M e N respectivamente (P e Q existem porque M e N são subespaços fechados). Para cada n, temos que $P(y_n) = Q(x_n) = 0$, pois $x_n \in N^\perp$ e $y_n \in M^\perp$. Usando a continuidade de P e de Q, e que P e Q deixam fixos os elementos de M e N, respectivamente, vem:

$$Pz + Qz = \lim_n P(x_n + y_n) + \lim_n Q(x_n + y_n) = \lim_n Px_n + \lim_n Qy_n = \lim_n x_n + \lim_n y_n = \lim(x_n + y_n) = z$$

Mas $Pz \in M$ e $Qz \in N$. Logo $z \in M + N$.

Questão 4) (3 pts) Considere o espaço $C_c(\mathbb{R})$ das funções contínuas de suporte compacto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, munido da norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$. Mostre que

(a) o subespaço $\{f \in C_c(\mathbb{R});\ f(0) = 0\}$ não é fechado em $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$,

(b) o subespaço $\{f \in C_c(\mathbb{R});\ f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

`Solução`: (a) Considere

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \le 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} (n-1)|x|, & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ 1 - |x|, & \text{se } \frac{1}{n} \le |x| \le 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases},$$

$n \in \mathbb{N}$. Então $f_n, f \in C_c(\mathbb{R})$, $\|f - f_n\|_1 \longrightarrow 0$, $f_n(0) = 0$ para todo n, mas $f(0) = 1$. O que prova que o subespaço em questão não é fechado.

(b) Considere o operator linear $T : C_c(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c(\mathbb{R})$ definido por $(Tf)(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\|Tf\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(-x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1, \quad \text{para toda } f \in C_c(\mathbb{R}),$$

donde decorre que T é contínua, e portanto $\ker T$ é fechado. O subespaço em questão é igual a $\ker(I - T)$.