MAT0230 - Geometria e Desenho Geométrico I - Turma 42

1^a Prova - 4 de novembro de 2022

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

GABARITO

Questão 1) (2 pts) Considere o seguinte modelo da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S \coloneqq \{A, B, C, D, E\}$, as retas são os subconjuntos de S que possuem exatamente dois elementos, um ponto P está na reta r se $P \in r$. Mostre que existem duas, e apenas duas, paralelas à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto C.

Resolução 1.

As retas que passam pelo ponto C, nesse modelo, são $\overleftrightarrow{\text{CA}}, \overleftrightarrow{\text{CB}}, \overleftrightarrow{\text{CD}}, \overleftrightarrow{\text{CE}}$ (respectivamente, {C,A}, {C,B}, {C,D}, {C,E}). A primeira não é paralela a $\overleftrightarrow{\text{AB}}$, pois $A \in \overleftrightarrow{\text{AB}}$ e $A \in \overleftrightarrow{\text{CA}}$, então A é ponto comum. A segunda não é paralela a $\overleftrightarrow{\text{AB}}$, pois $B \in \overleftrightarrow{\text{AB}}$ e $A \in \overleftrightarrow{\text{CB}}$, então B é ponto comum. Tanto A quanto B não pertencem às outras duas, portanto elas são as duas únicas paralelas a $\overleftrightarrow{\text{AB}}$ passando por C, como queríamos.

Questão 2 (2 pts) Suponha que A e B estão em lados opostos da reta r e que C está em r. Mostre que, se $A * D * C$, então D e B estão em lados opostos da reta r.

Resolução 2.

Se $\boxed{A \text{ e } B \text{ estão em lados opostos de } r}$, então por definição AB intersecta r num ponto $P \in r$ tal que $A * P * B$. Daí $r = \overleftrightarrow{\mathrm{PC}}$ e como por hipótese $A * D * C$, então por definição de semirreta e por **(B1)** segue $D \in \overrightarrow{\mathrm{CA}}$. Aplicando o **Lema 4.13** para a reta r e o ponto $D \in \overrightarrow{\mathrm{CA}}$, vem que $\boxed{A \text{ e } D \text{ estão do mesmo lado de } r}$.

Das afirmações destacadas, segue de **(B4 i)** que B e D estão em lados opostos de r, como queríamos.

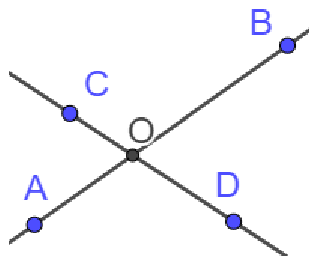
Questão 3) (2 pts) Suponha que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ se interceptam no ponto O e que valem $A*O*B$ e $C*O*D$.

(a) Esboce uma figura que ilustre a situação descrita.

(b) Mostre que, se $\angle COB \cong \angle COA$, então $\angle DOB \cong \angle DOA$.

Resolução 3.

(a)



(b) Por hipótese temos que $\angle COB$ e $\angle BOD$ são suplementares, e também $\angle COA$ e $\angle DOA$ são suplementares. Como $\angle COB \cong \angle COA$, segue então da **Prop. 6.4** o desejado.

Questão 4) (4 pts) São dados quatro pontos A, B, C e D. Quaisquer três dentre os pontos dados são não-colineares. Além disso, o ponto D está no interior do ângulo $\angle BAC$ e C está no interior de $\angle ABD$.

(a) Esboce uma figura que ilustre a situação descrita.

Suponha que $\angle BAD \cong \angle ABC$ e $\angle CAD \cong \angle DBC$.

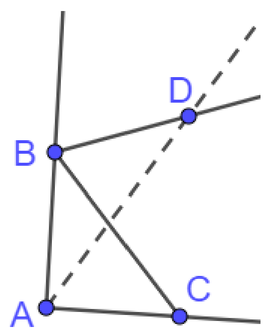
(b) Mostre que $\angle BAC \cong \angle ABD$.

(c) Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

(d) Mostre que $\Delta CBD \cong \Delta DAC$.

Resolução 4.

(a) Nesta figura, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ está pontilhada a fim de facilitar o acompanhamento do raciocínio para os itens abaixo.



(b) Por hipótese, D está no interior de $\angle BAC$ e C está no interior de $\angle ABD$. Supondo também que $\angle BAD \cong \angle ABC$ e $\angle CAD \cong \angle DBC$, aplicando o **Teorema 6.6** segue que $\angle BAC \cong \angle ABD$, como queríamos.

(c)

$$\begin{array}{cccll}
\angle CAB & \cong & \angle DBA & \textbf{(A)} & \text{pelo item (b)} \\
AB & \cong & BA & \textbf{(L)} & \text{por } \textbf{(C2)} \\
\angle ABC & \cong & \angle BAD & \textbf{(A)} & \text{por hipótese} \\
\hline
\triangle ABC & \cong & \triangle BAD & \textbf{(ALA)} & \textbf{(Prop. 6.7)}
\end{array}$$

(d) Da congruência que provamos no item (c) segue que [i] $BD \cong AC$ e [ii] $BC \cong AD$. Por hipótese, temos [iii] $\angle CAD \cong \angle DBC$. Daí

$$\begin{array}{cccll}
CB & \cong & DA & \textbf{(L)} & \text{por [i]} \\
\angle CBD & \cong & \angle DAC & \textbf{(A)} & \text{por [iii]} \\
BD & \cong & AC & \textbf{(L)} & \text{por [ii]} \\
\hline
\triangle CBD & \cong & \triangle DAC & \textbf{(LAL)} & \textbf{(C6)}
\end{array}$$

Use esta página como rascunho ou como espaço para continuar as soluções das questões.

Axiomas e teoremas que podem ser úteis.

(I1) Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r que passa por P e por Q.

(I2) Dada uma reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r.

(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

(B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.

(B2) Dados dois pontos B e D, existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.

(B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

(B4) Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos que não estão em r. (i) Se os pontos A e B estão do mesmo lado da reta r, e os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r. (ii) Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r, e os pontos B e C estão em lados opostos da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r.

(C1) Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.

(C2) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.

(C3) Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.

(C4) Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

(C5) Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

(C6) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Lema 4.13. Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r. Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Então Z e Q estão do mesmo lado de r.

Proposição 6.4. Sejam $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ dois ângulos congruentes, sejam $\angle CBD$ e $\angle C'B'D'$ seus suplementares. Então vale $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.

Teorema 6.6. Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior de $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$.

Proposição 6.7. Sejam A, B e C três pontos não-colineares, sejam A', B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.